Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

# Es kann nur eine(n) geben – führt Wettbewerb immer zum Monopol?

Stefan Großkinsky
Faszination Mathematik Physik
25.04.2024

blog.coinroutes.com/2020/01/08/can-there-be-only-one/

**Stochastik und Ihre Anwendungen**

PhD Thomas Gottfried, Sam Forbes

BSc Anna Scherzer, Cristian Kommegne, Roman Winkler


blog.coinroutes.com/2020/01/08/can-there-be-only-one/

Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

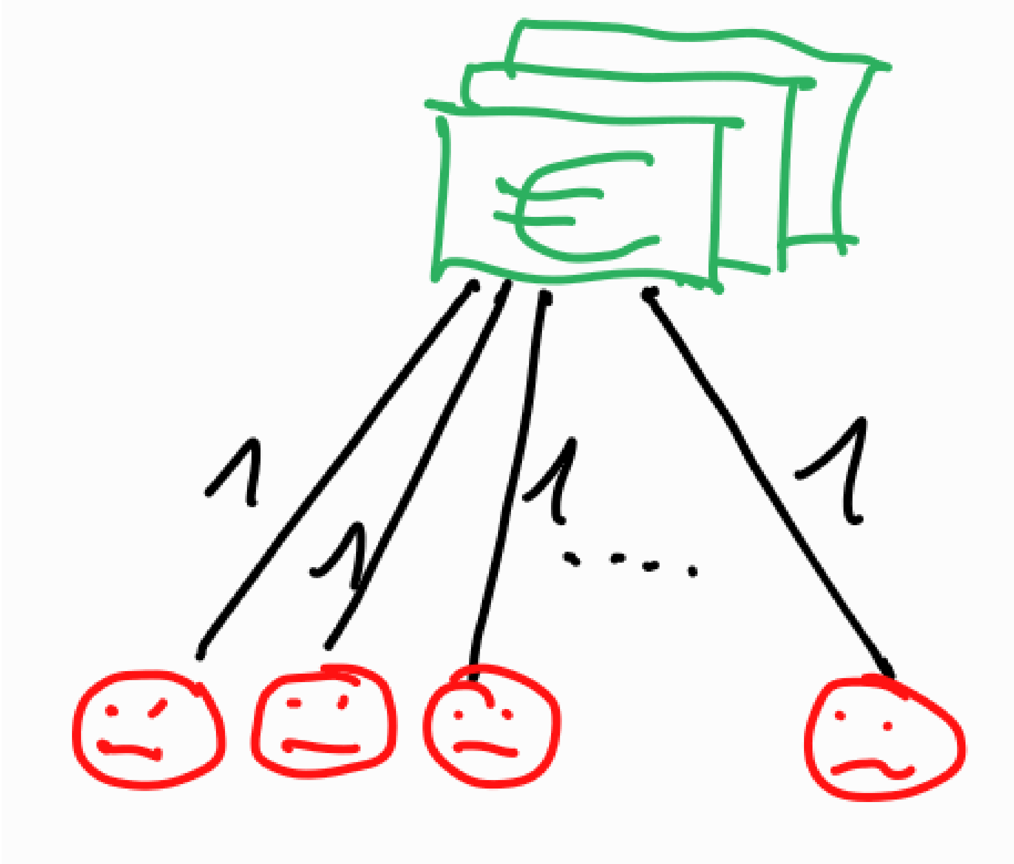
# Es kann nur eine(n) geben – führt Wettbewerb immer zum Monopol?

Stefan Großkinsky
Faszination Mathematik Physik
25.04.2024

# Was ist fair?

**100 Euro, 100 Leute**

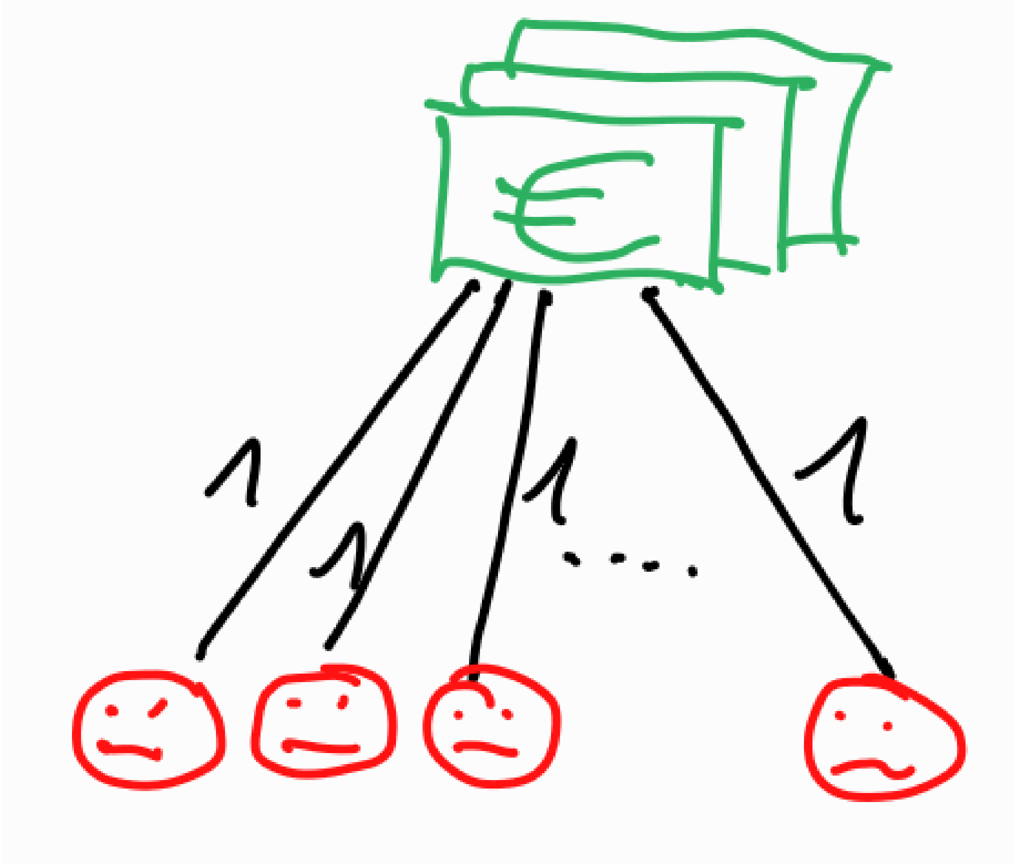
Jeder kriegt einen Euro



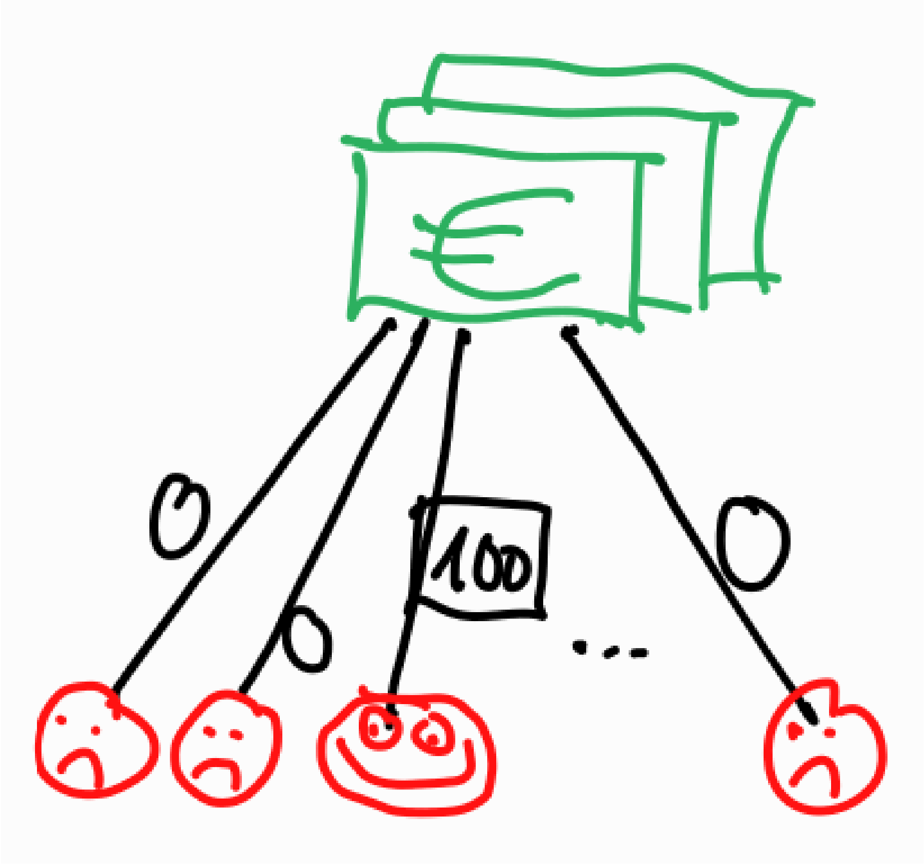
# Was ist fair?

**100 Euro, 100 Leute**

Jeder kriegt einen Euro



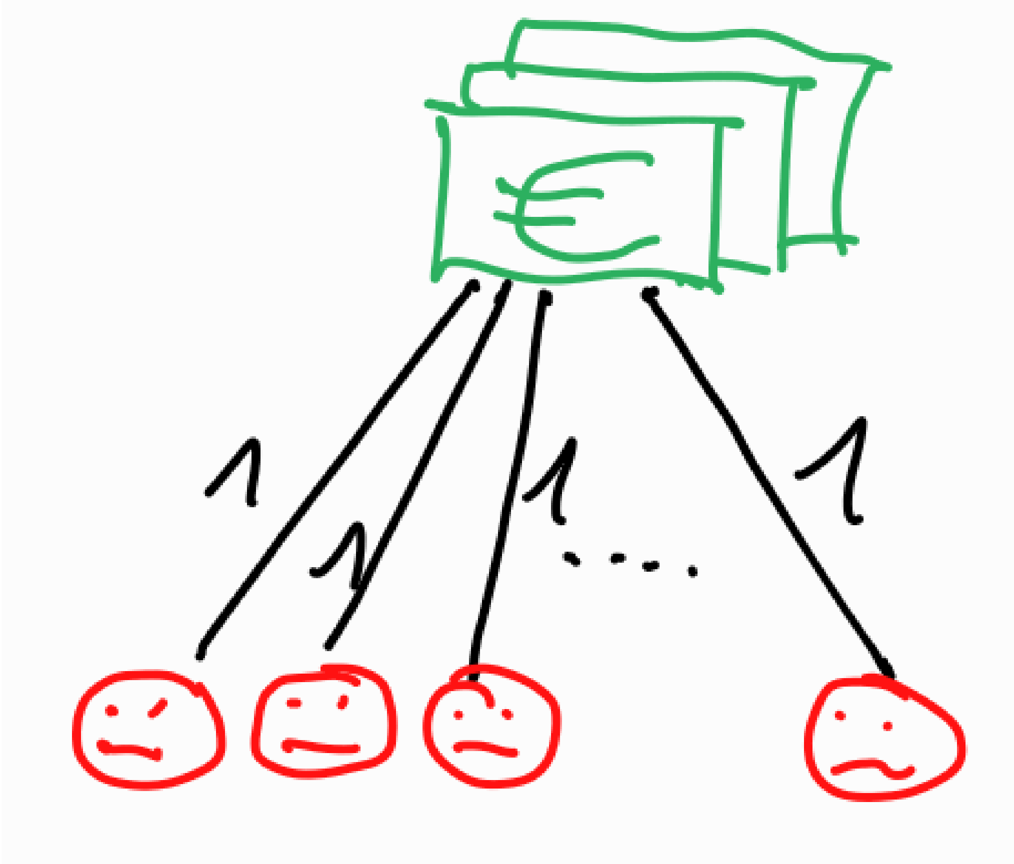

Zufällige Gewinnerin



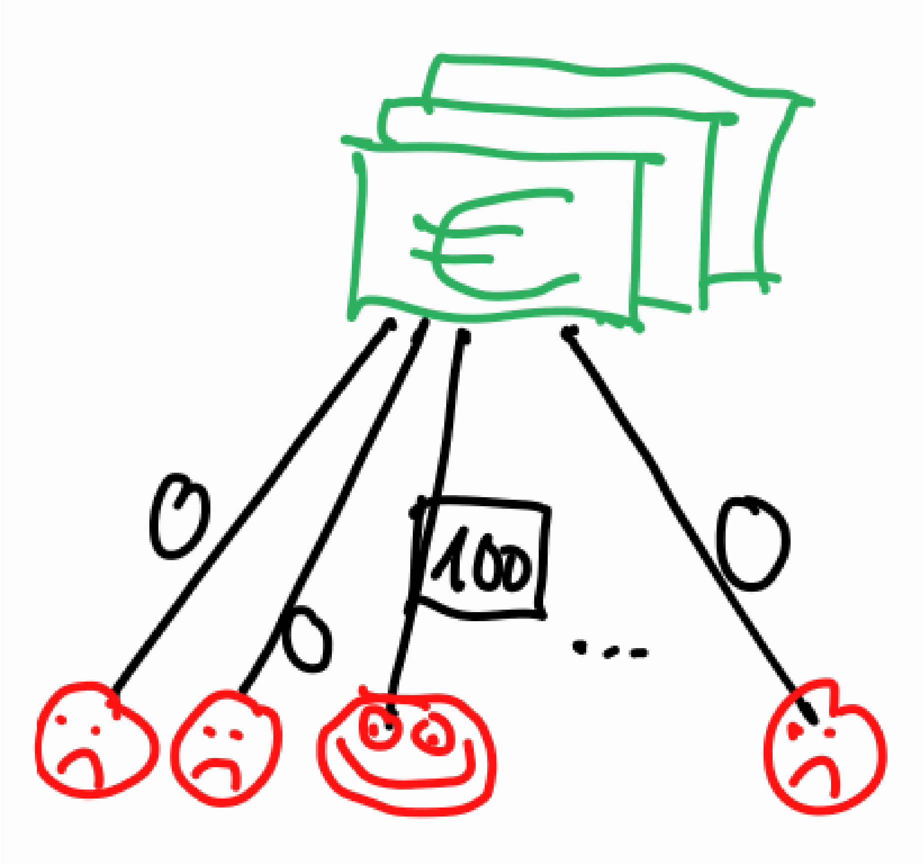
# Was ist fair?

**100 Euro, 100 Leute**

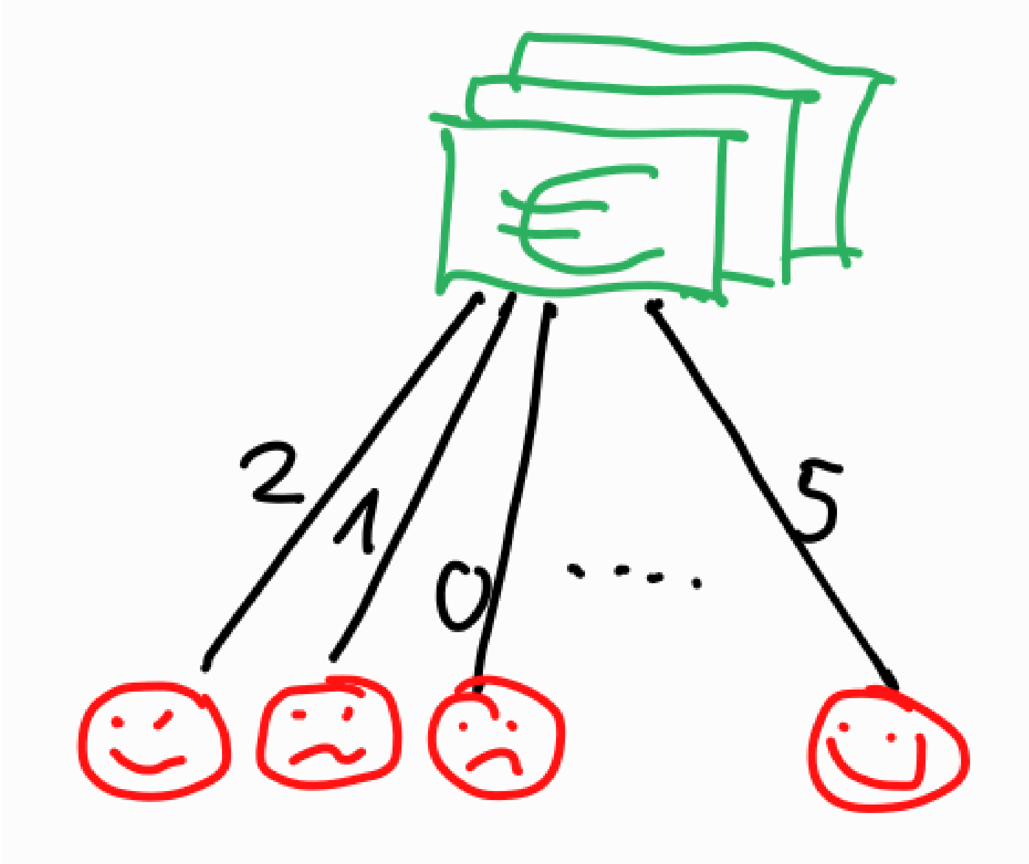
Jeder kriegt einen Euro




Zufällige Gewinnerin




Jeder Euro wird zufällig verteilt

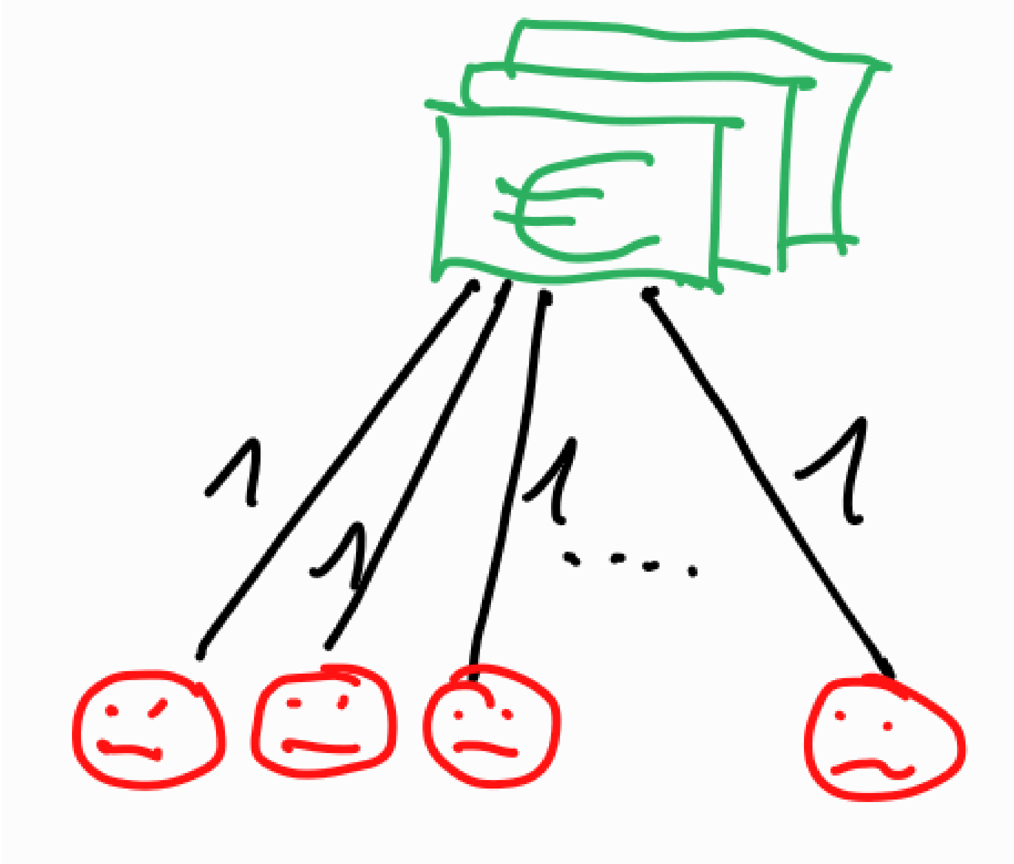


# Was ist fair?

**100 Euro, 100 Leute**

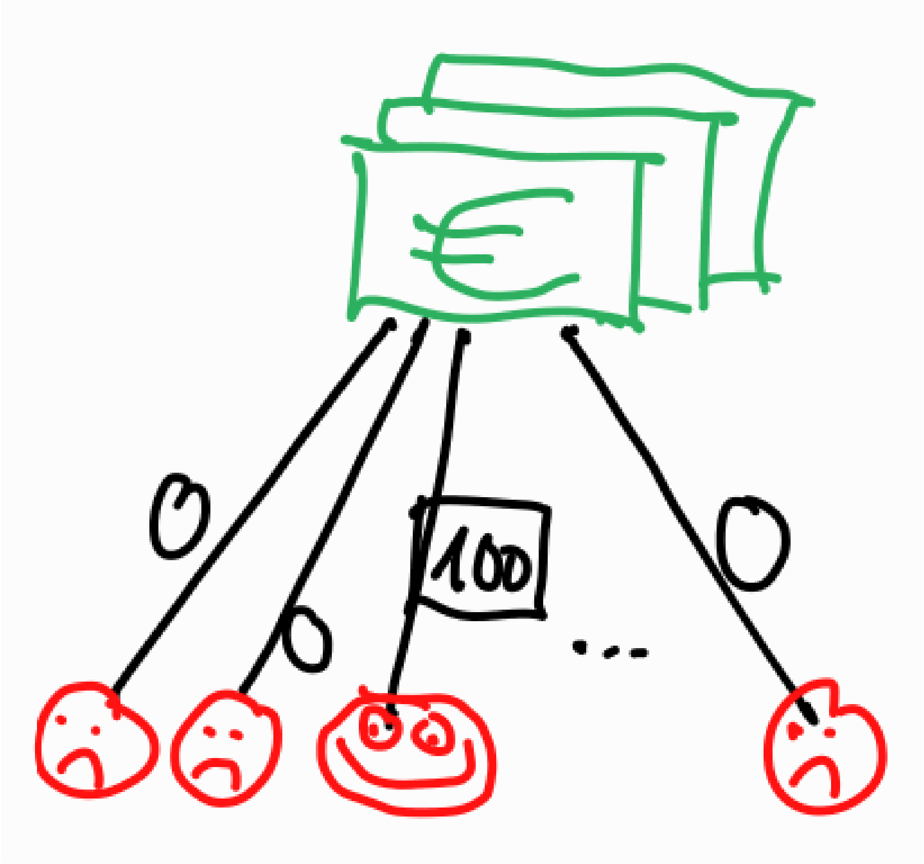
**Fair:** Jeder hat die gleichen Chancen

Jeder kriegt einen Euro

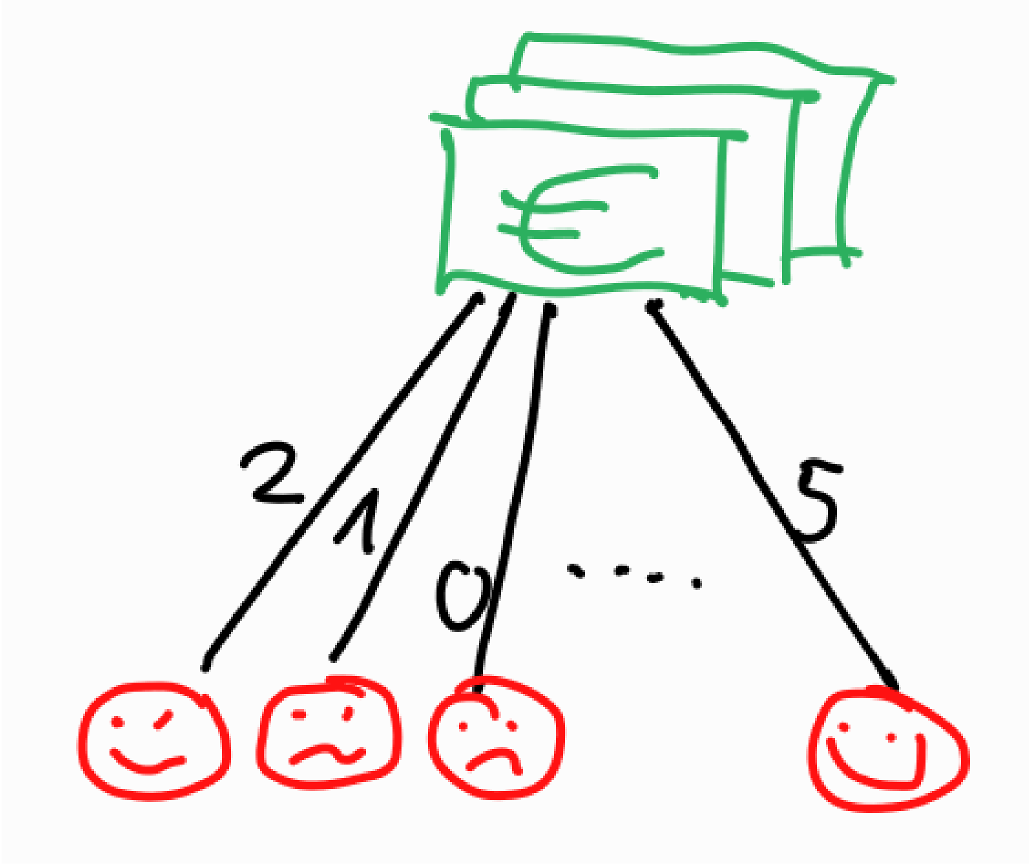



$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot 1 = 1$

Zufällige Gewinnerin




Jeder Euro wird zufällig verteilt

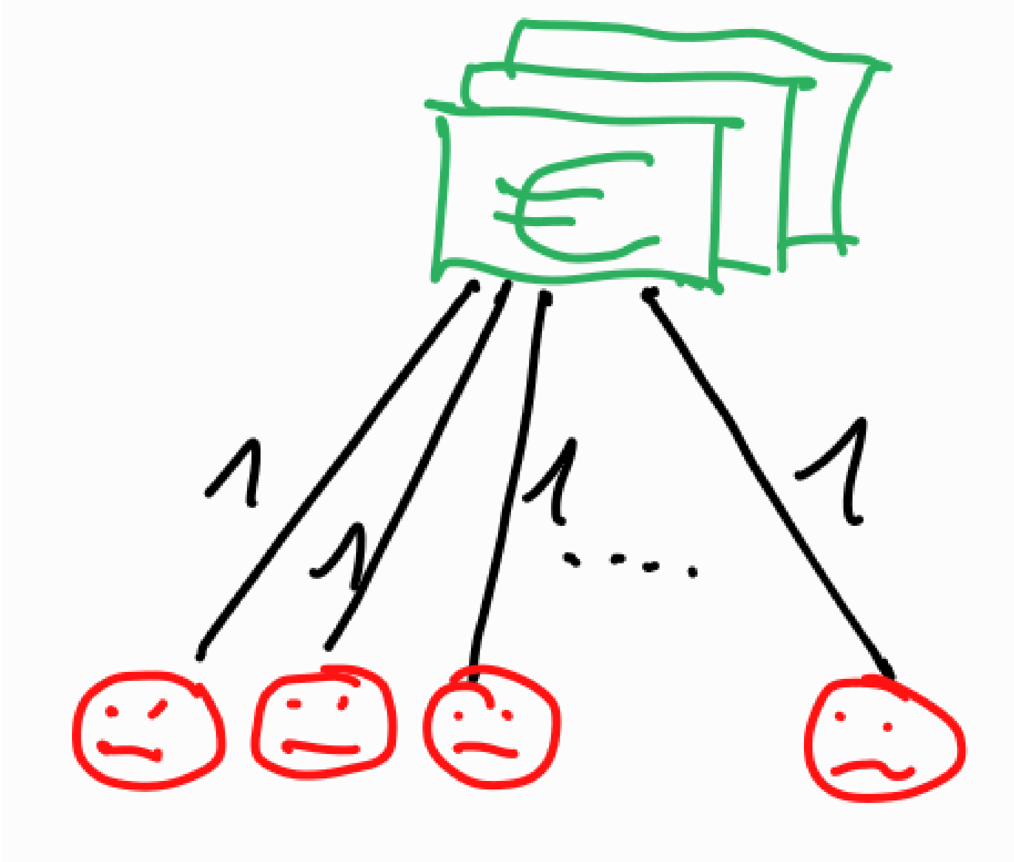


# Was ist fair?

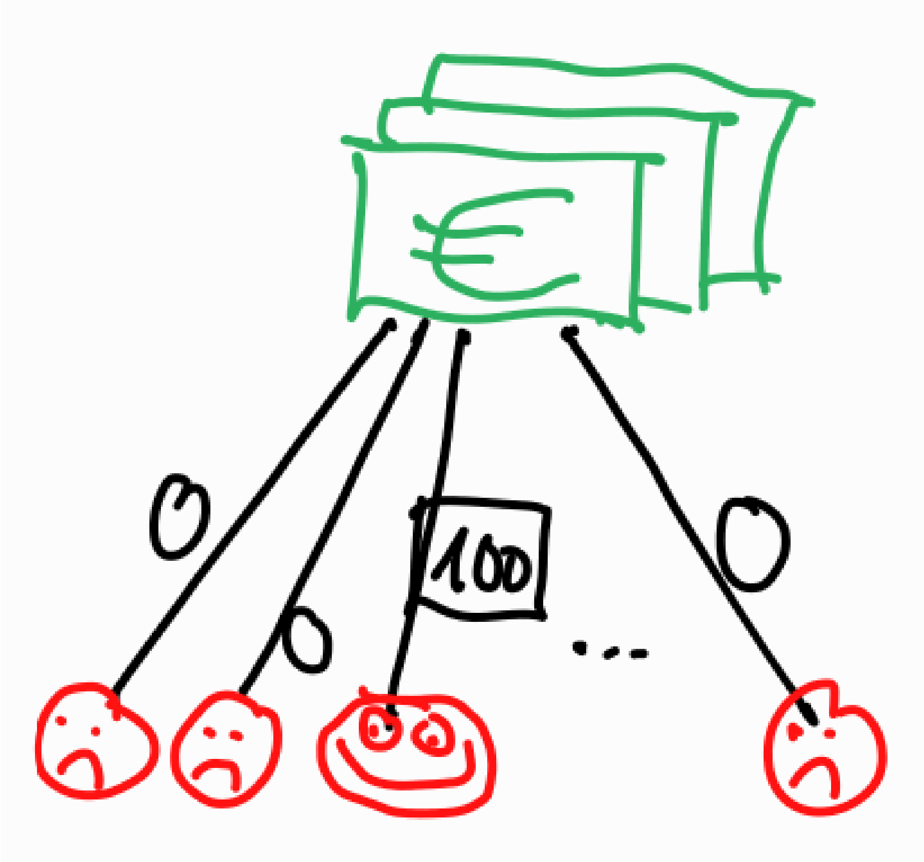
**100 Euro, 100 Leute**

**Fair:** Jeder hat die gleichen Chancen

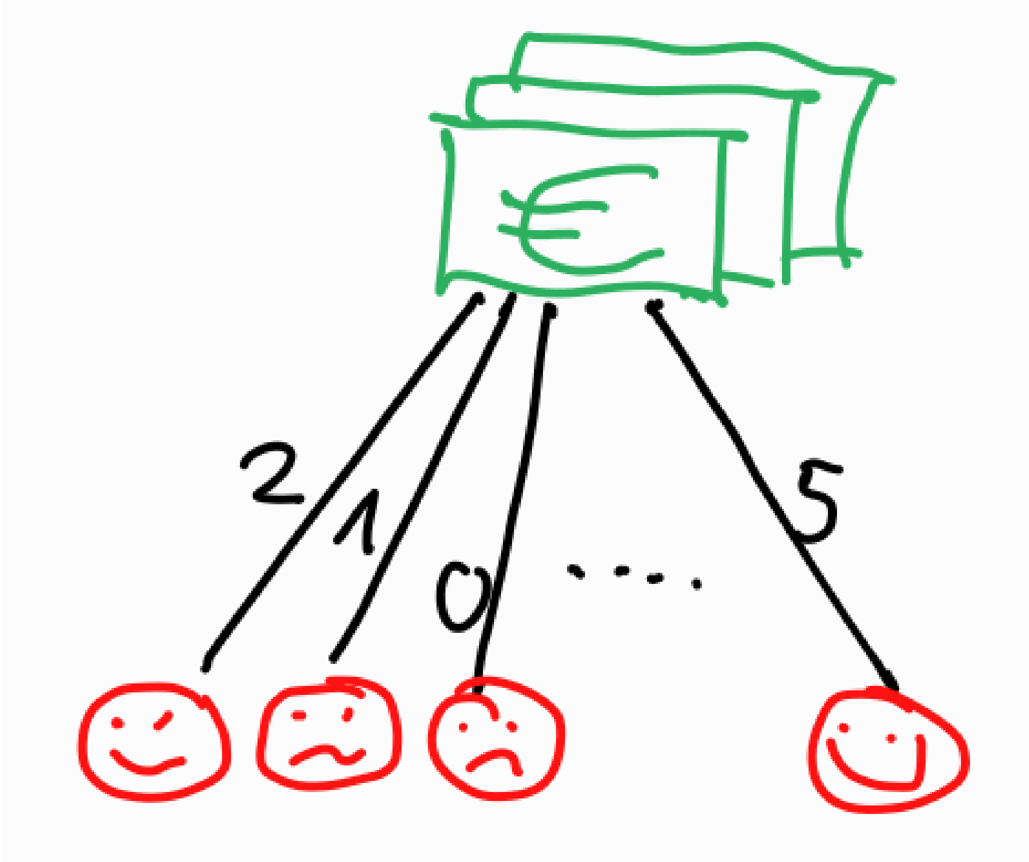
Jeder kriegt einen Euro




Zufällige Gewinnerin




Jeder Euro wird zufällig verteilt




$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot 1 = 1$$

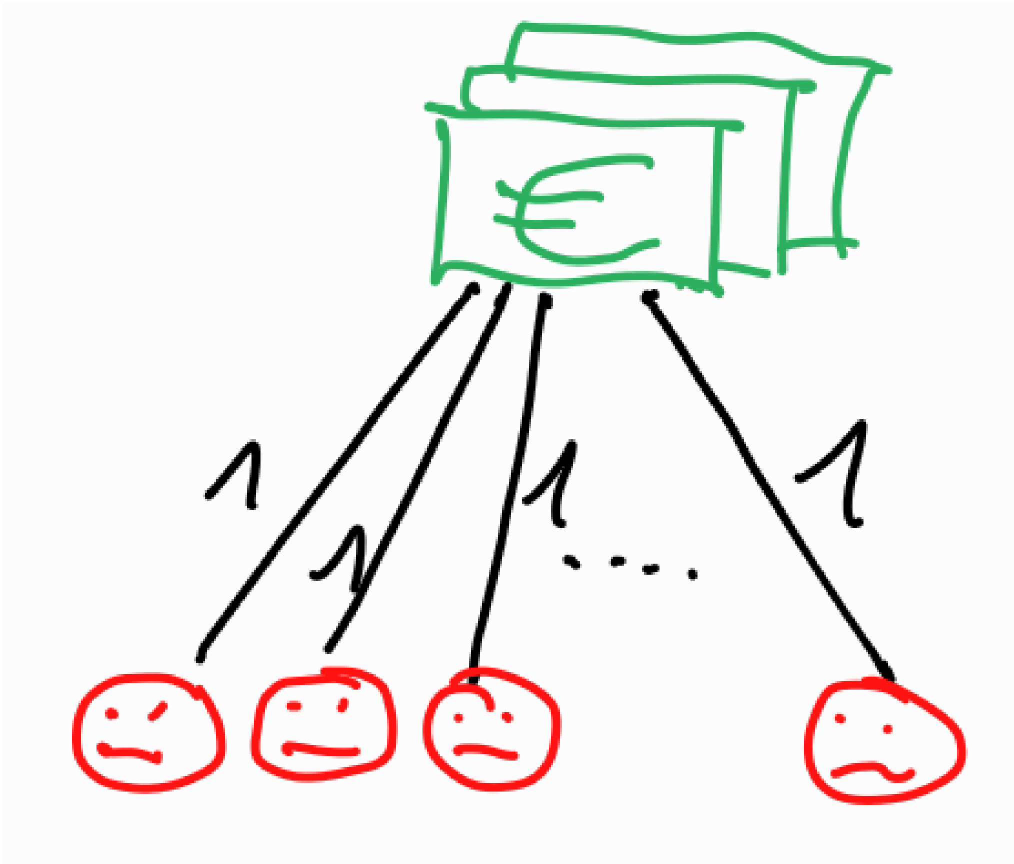
$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{100} \cdot 100 + \frac{99}{100} \cdot 0 = 1$$

# Was ist fair?

**100 Euro, 100 Leute**

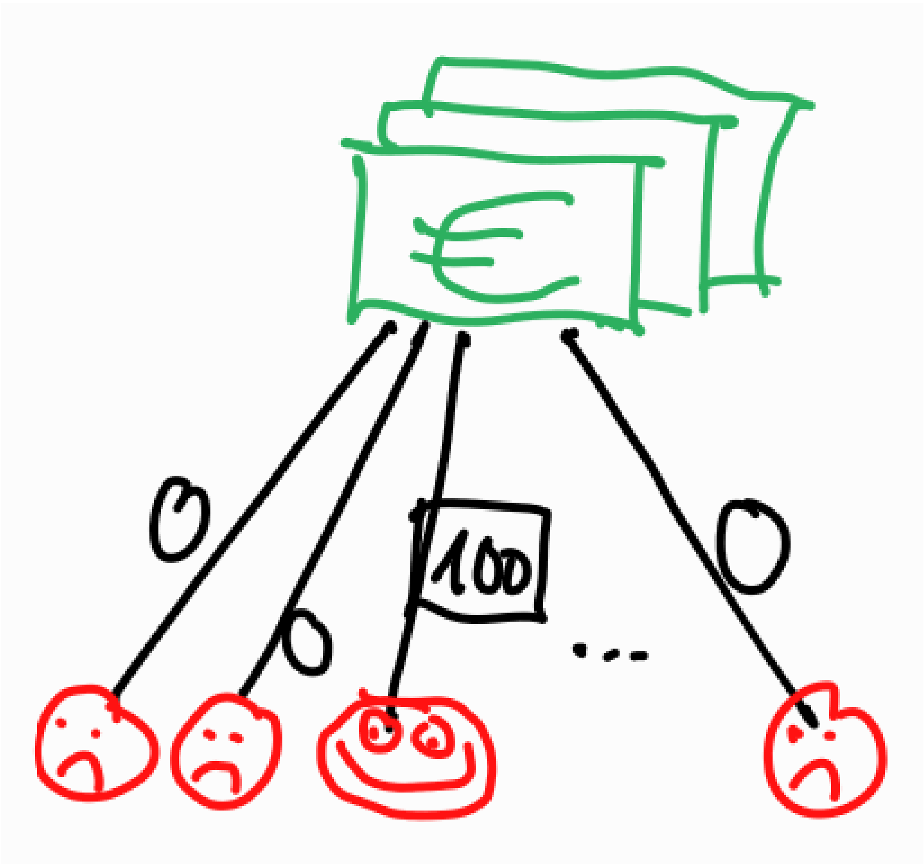
**Fair:** Jeder hat die gleichen Chancen

Jeder kriegt einen Euro



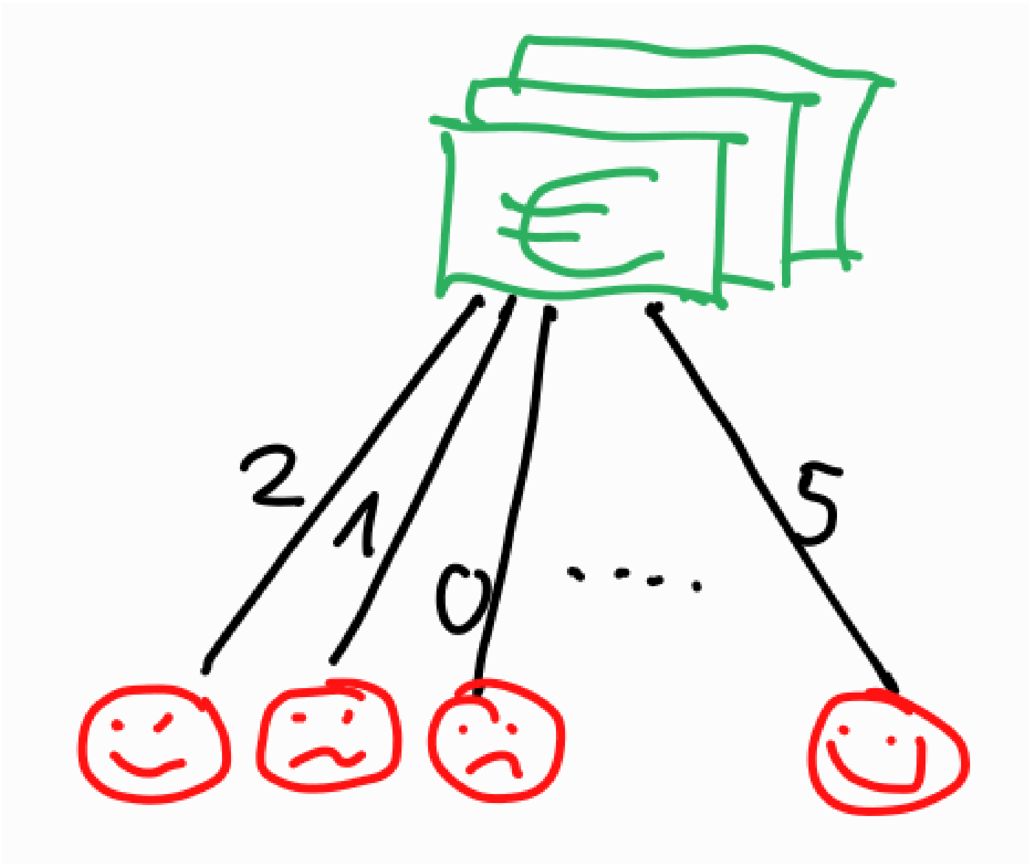

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot 1 = 1$$

Zufällige Gewinnerin




$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{100} \cdot 100 + \frac{99}{100} \cdot 0 = 1$$

Jeder Euro wird zufällig verteilt



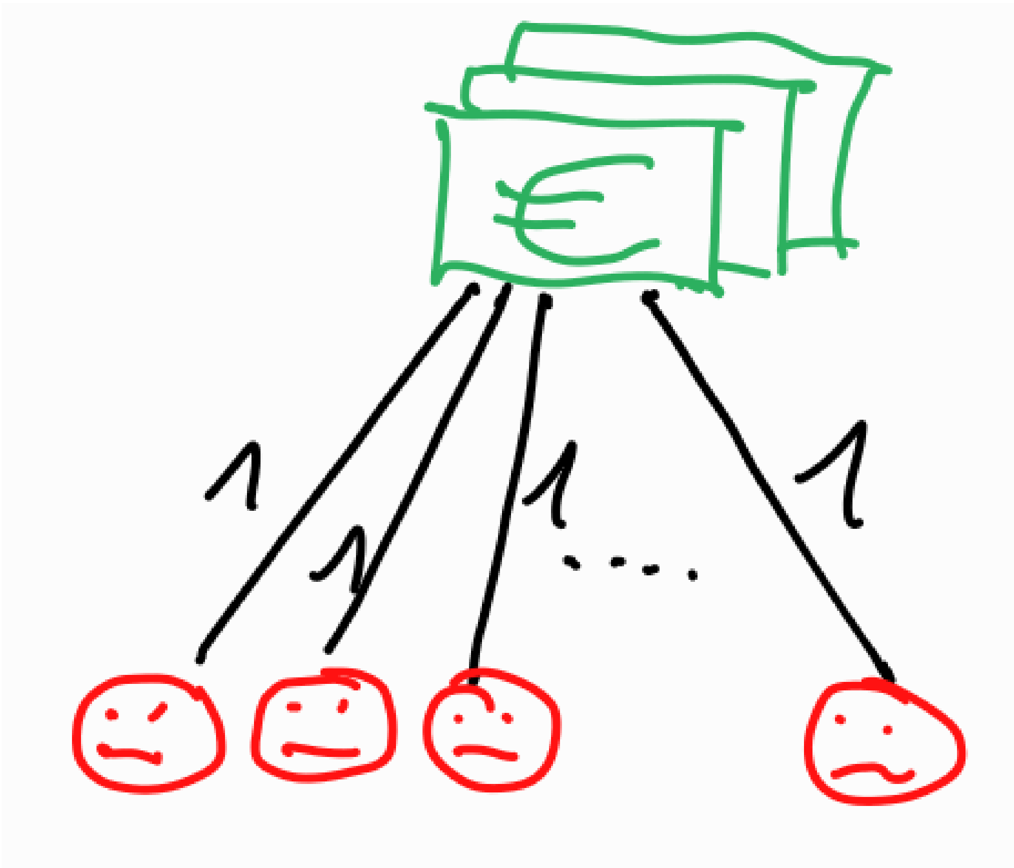

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{100} \cdot 100 = 1$$

# Was ist fair?

**100 Euro, 100 Leute**

**Fair:** Jeder hat die gleichen Chancen

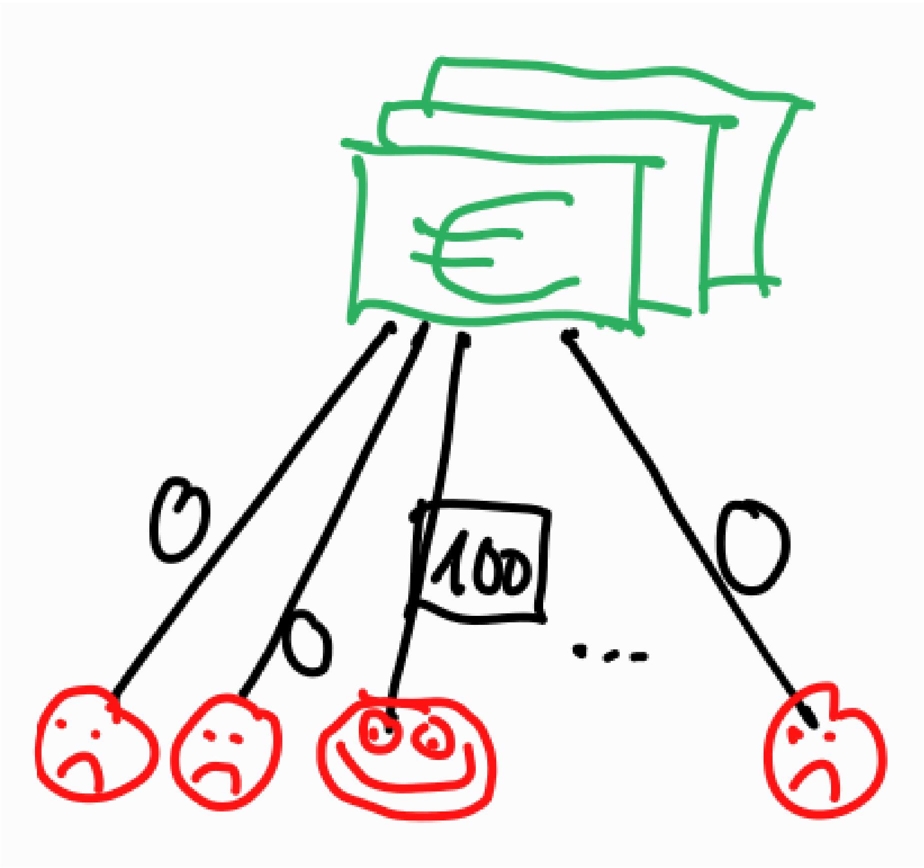
Jeder kriegt einen Euro




$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = 0$$

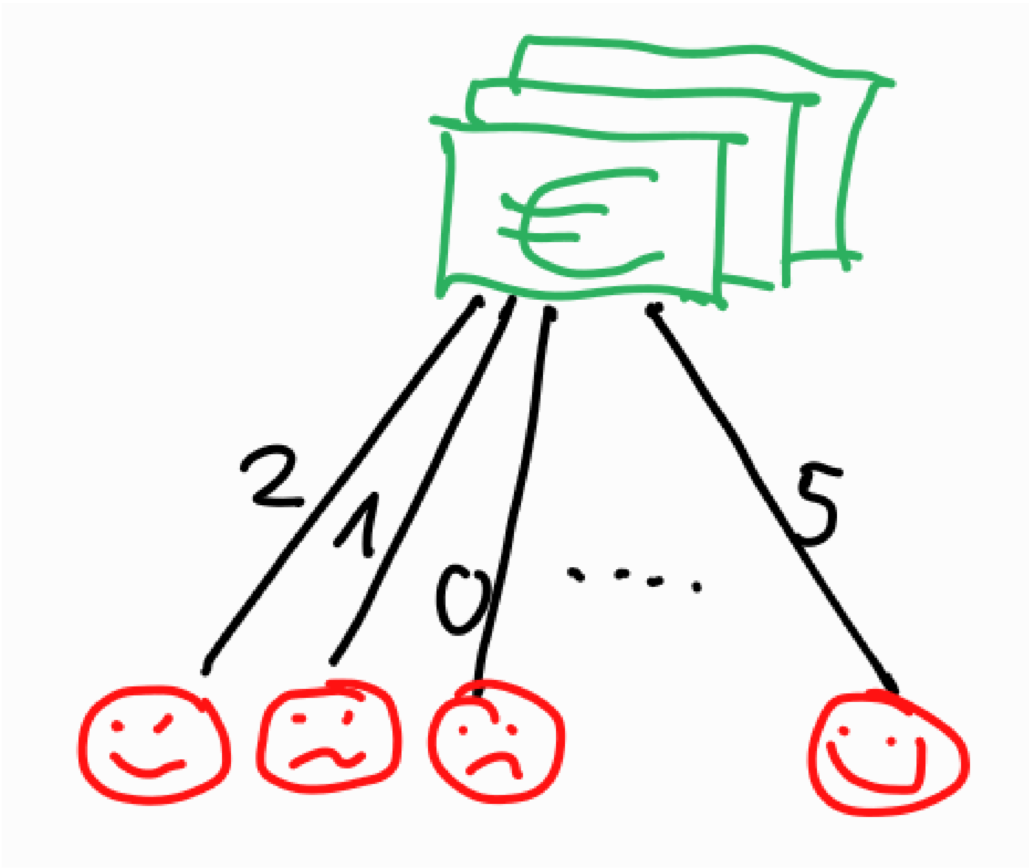
Zufällige Gewinnerin




$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{100} \cdot 100 + \frac{99}{100} \cdot 0 = 1$$

$$\mathbb{V}[X] = 99$$

Jeder Euro wird zufällig verteilt




$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{100} \cdot 100 = 1$$

$$\mathbb{V}[X] = 99/100$$

# Was ist fair?

**100 Euro, 100 Leute**

**Fair:** Jeder hat die gleichen Chancen

- **Frequentistische Interpretation**
  wir „spielen“ n mal **unabhängig**

# Was ist fair?

**100 Euro, 100 Leute**

**Fair:** Jeder hat die gleichen Chancen

- **Frequentistische Interpretation**
  wir „spielen" n mal **unabhängig**

**Gesetz der großen Zahlen**

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{f.s.} \mathbb{E}[X] = 1$$

# Was ist fair?

**100 Euro, 100 Leute**

**Fair:** Jeder hat die gleichen Chancen

- **Frequentistische Interpretation**
  wir „spielen“ n mal **unabhängig**

**Gesetz der großen Zahlen**

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{f.s.} \mathbb{E}[X] = 1$$

- **Ergodizität**
  empirischer Mittelwert konvergiert gegen Erwartungswert

# Was ist fair?

**100 Euro, 100 Leute**

**Fair:** Jeder hat die gleichen Chancen

- **Frequentistische Interpretation**
  wir „spielen“ n mal **unabhängig**

**Gesetz der großen Zahlen**

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{f.s.} \mathbb{E}[X] = 1$$

- **Ergodizität**
  empirischer Mittelwert konvergiert gegen Erwartungswert

- **Probleme in der Realität**
  Wiederholbarkeit? Gerechtigkeit?

# Was ist gerecht??

**Kann nicht (allgemein) mathematisch beantwortet werden!**

Hängt von der Situation ab, Hintergrund der Teilnehmer etc.

# Was ist gerecht??

**Kann nicht (allgemein) mathematisch beantwortet werden!**

Hängt von der Situation ab, Hintergrund der Teilnehmer etc.

3 Lutscher, 3 Kinder

[Ana Sha/Shutterstock]

# Was ist gerecht??

**Kann nicht (allgemein) mathematisch beantwortet werden!**

Hängt von der Situation ab, Hintergrund der Teilnehmer etc.

3 Lutscher, 3 Kinder

[Ana Sha/Shutterstock]

3 Lutscher, 4 Kinder

# Was ist gerecht??

**Kann nicht (allgemein) mathematisch beantwortet werden!**

Hängt von der Situation ab, Hintergrund der Teilnehmer etc.

3 Lutscher, 3 Kinder

[Ana Sha/Shutterstock]

3 Lutscher, 4 Kinder


2 Würmer, 3 Küken

[animalia.bio/de]

# Yard-sale Modell

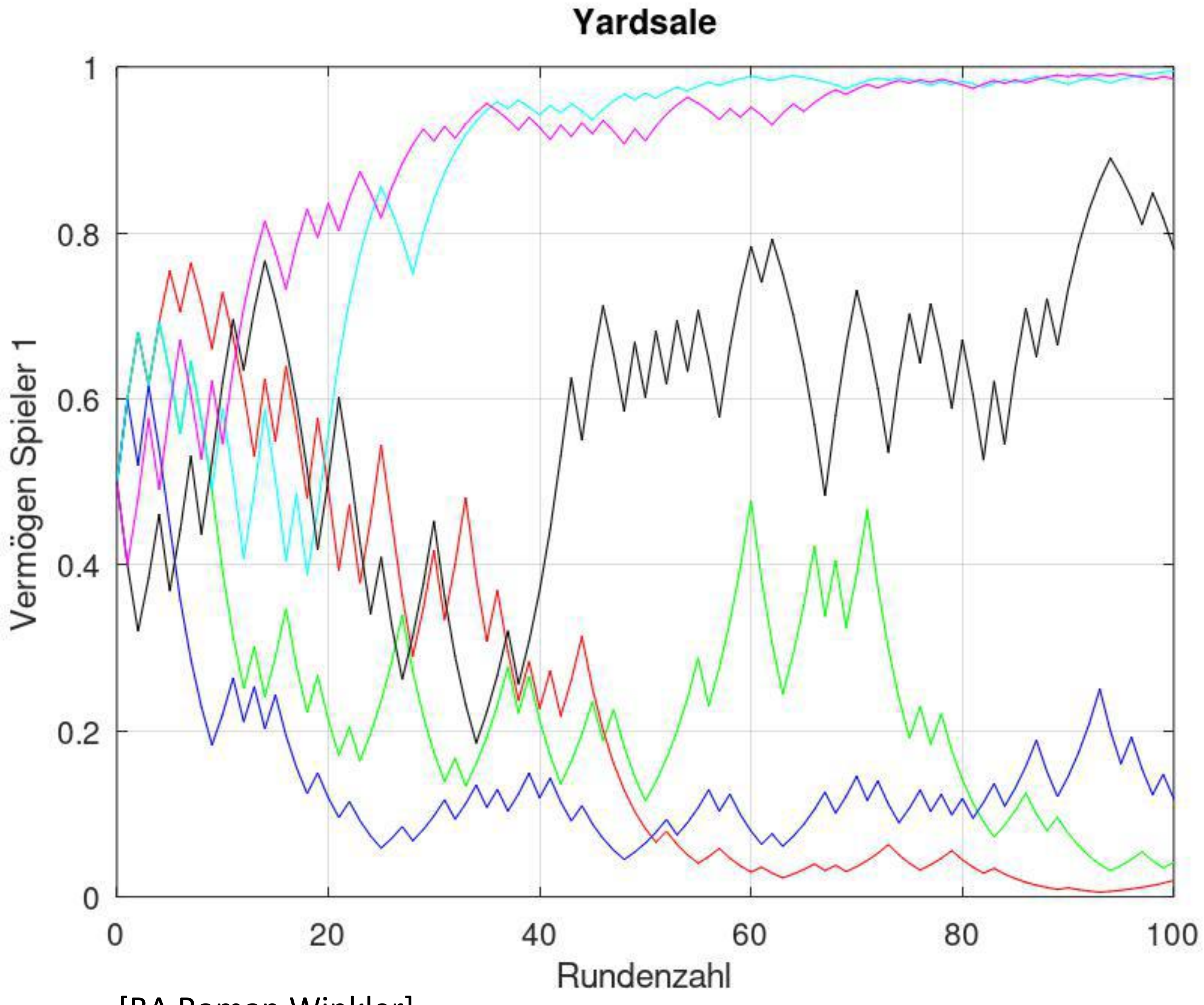
**2 Spieler**, spielen um einen Anteil a (z.B. 10%) des **ärmeren** Spielers

Jeder gewinnt mit Wahrscheinlichkeit ½

# Yard-sale Modell

**2 Spieler**, spielen um einen Anteil a (z.B. 10%) des **ärmeren** Spielers

Jeder gewinnt mit Wahrscheinlichkeit ½




[BA Roman Winkler]

# Yard-sale Modell

2 Spieler, Anteile $\boldsymbol{X_t,\ 1-X_t \in [0,1]}$ , Anfangsbedingung z.B. $\boldsymbol{X_0 = 1/2}$

Parameter $\boldsymbol{a \in (0,1)}$

$$\boldsymbol{X_{t+1} = X_t \begin{cases} +a\cdot\min(X_t, 1-X_t) & ,\ \text{mit Wk } 1/2 \\ -a\cdot\min(X_t, 1-X_t) & ,\ \text{mit Wk } 1/2 \end{cases}}$$

# Yard-sale Modell

2 Spieler, Anteile $X_t,\ 1 - X_t \in [0,1]$ , Anfangsbedingung z.B. $X_0 = 1/2$

Parameter $a \in (0,1)$

$$X_{t+1} = X_t \begin{cases} +a \cdot \min(X_t, 1 - X_t) & , \text{ mit Wk } 1/2 \\ -a \cdot \min(X_t, 1 - X_t) & , \text{ mit Wk } 1/2 \end{cases}$$

**Martingal** (faires Spiel)

$$\mathbb{E}[X_{t+1}|X_t] = X_t + \frac{1}{2} a \min(X_t, 1 - X_t) - \frac{1}{2} a \min(X_t, 1 - X_t) = X_t$$

# Yard-sale Modell

2 Spieler, Anteile $X_t,\ 1 - X_t \in [0,1]$ , Anfangsbedingung z.B. $X_0 = 1/2$

Parameter $a \in (0,1)$

$$X_{t+1} = X_t \begin{cases} +a \cdot \min(X_t, 1 - X_t) & ,\ \text{mit Wk } 1/2 \\ -a \cdot \min(X_t, 1 - X_t) & ,\ \text{mit Wk } 1/2 \end{cases}$$

**Martingal** (faires Spiel)

$$\mathbb{E}[X_{t+1} | X_t] = X_t$$

**Andere Varianten**

$$X_{t+1} = X_t \begin{cases} +a \cdot (1 - X_t) & ,\ \text{mit Wk } X_t \\ -a \cdot X_t & ,\ \text{mit Wk } (1 - X_t) \end{cases}$$

# Yard-sale Modell

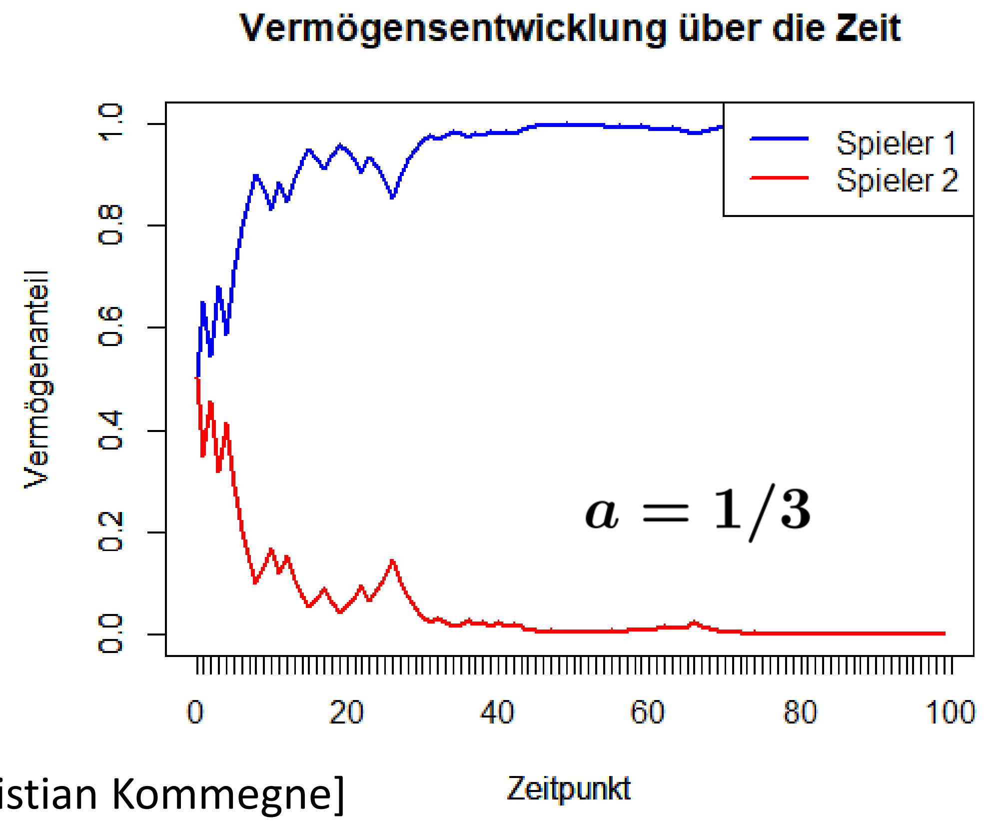
2 Spieler, Anteile $X_t,\ 1 - X_t \in [0,1]$ , Anfangsbedingung z.B. $X_0 = 1/2$

Parameter $a \in (0,1)$

$$X_{t+1} = X_t \begin{cases} +a \cdot \min(X_t, 1 - X_t) & \text{, mit Wk } 1/2 \\ -a \cdot \min(X_t, 1 - X_t) & \text{, mit Wk } 1/2 \end{cases}$$

**Martingal** (faires Spiel)

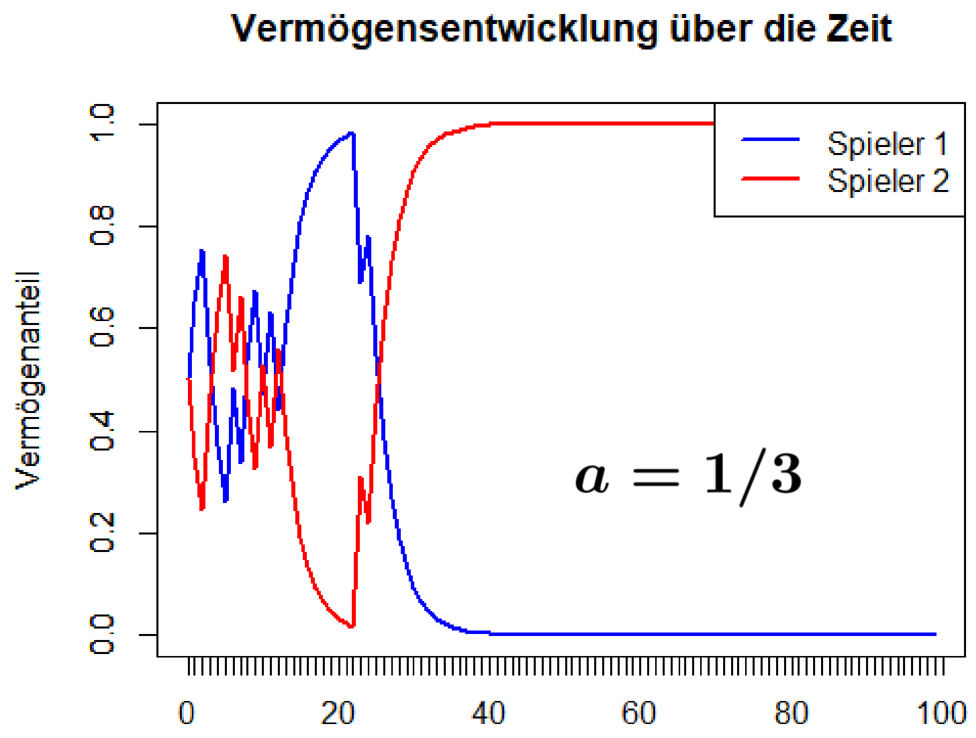
$$\mathbb{E}[X_{t+1} | X_t] = X_t$$




[BA Christian Kommegne]

## Andere Varianten

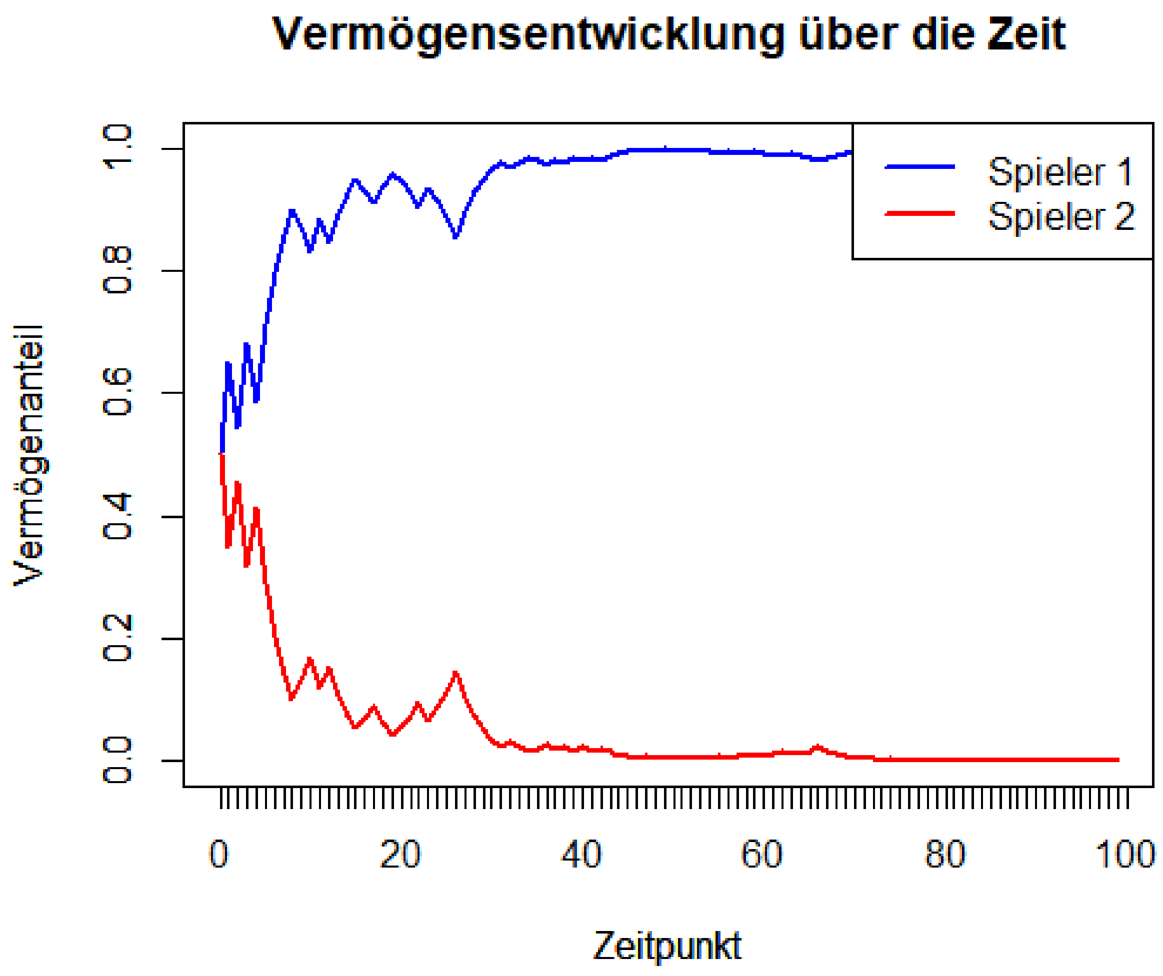
$$X_{t+1} = X_t \begin{cases} +a \cdot (1 - X_t) & \text{, mit Wk } X_t \\ -a \cdot X_t & \text{, mit Wk } (1 - X_t) \end{cases}$$

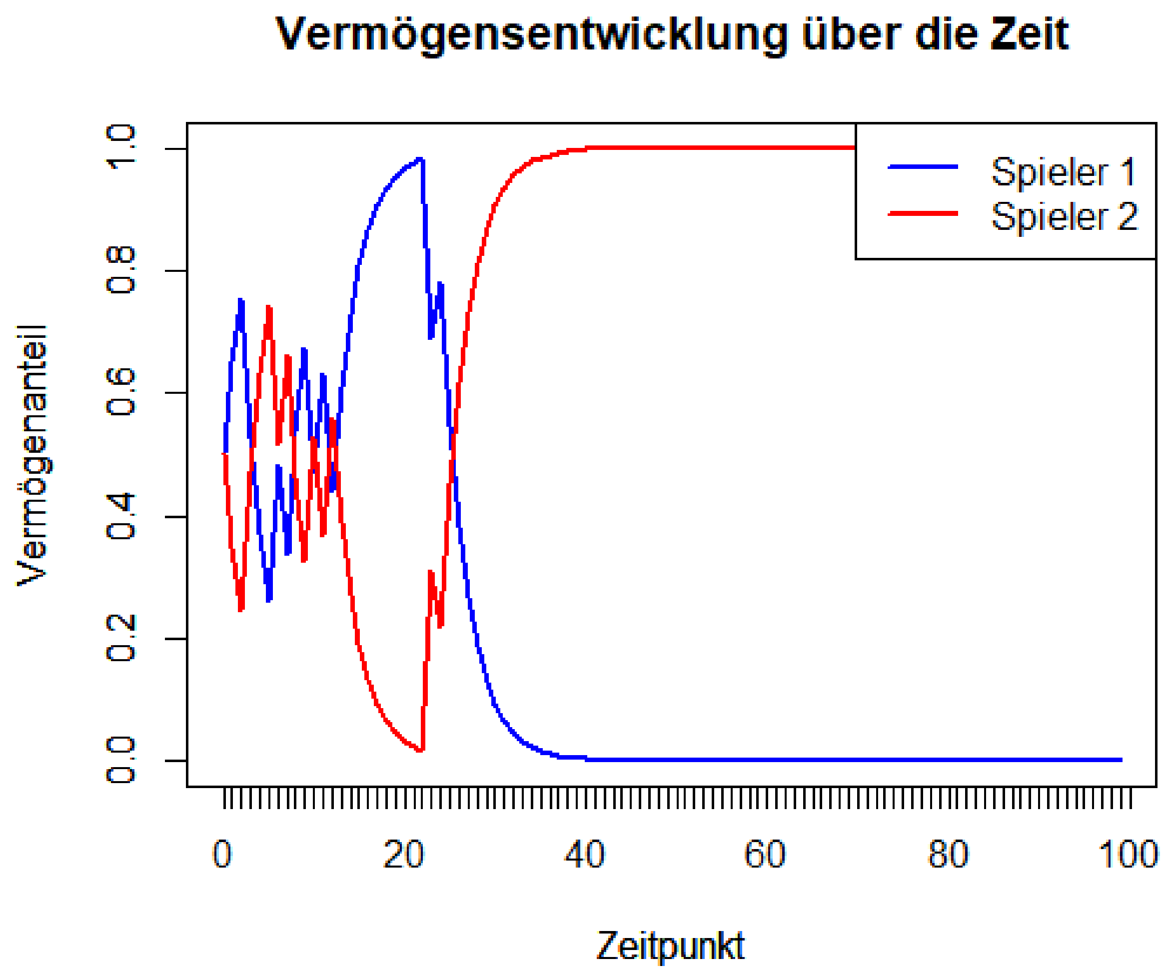


# Martingal Konvergenz Theorem

Sei $(X_t : t \geq 0)$ ein **Martingal** und $X_t \in [0,1]$ (**beschränkt**).

Dann konvergiert $X_t \xrightarrow{f.s.} X_\infty \in [0,1]\,, \quad t \to \infty$ .



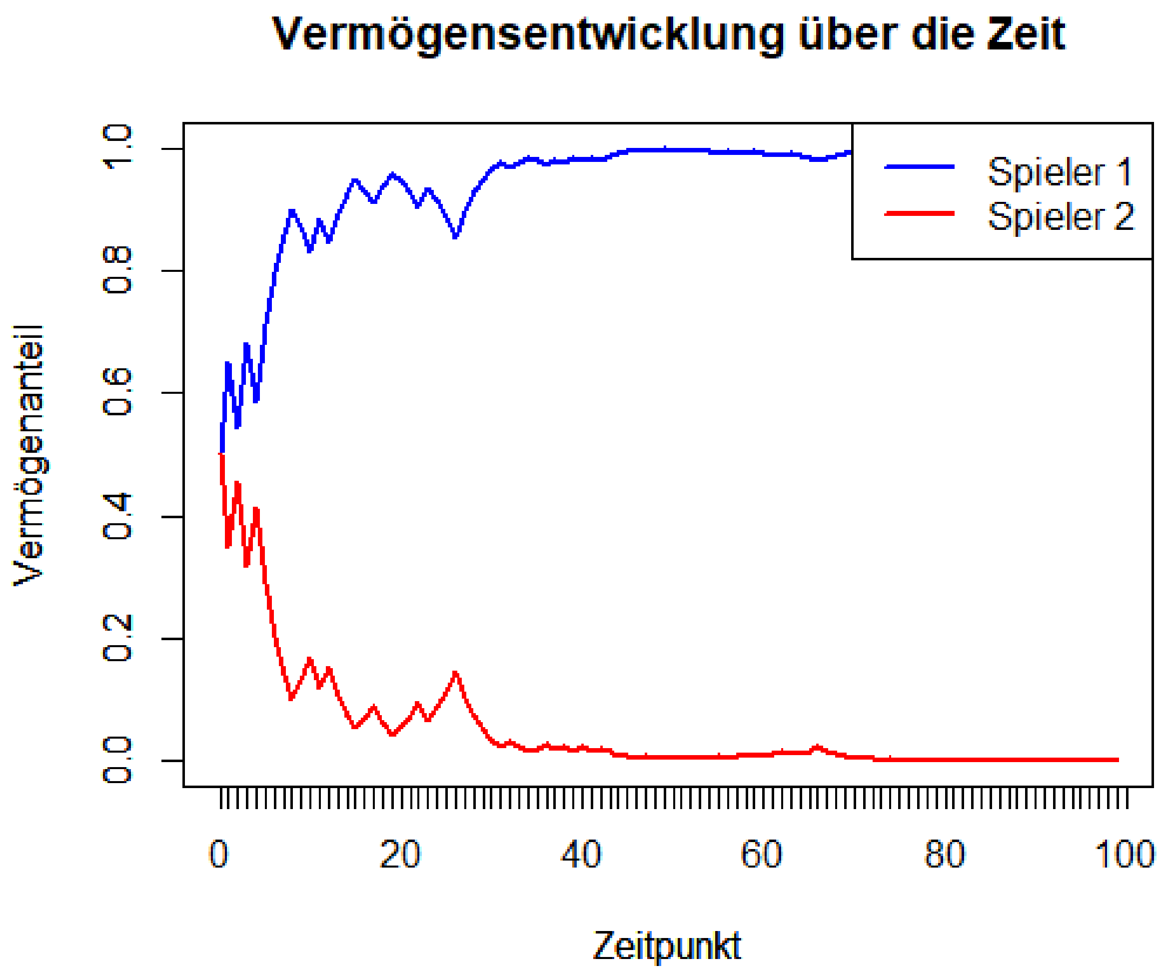



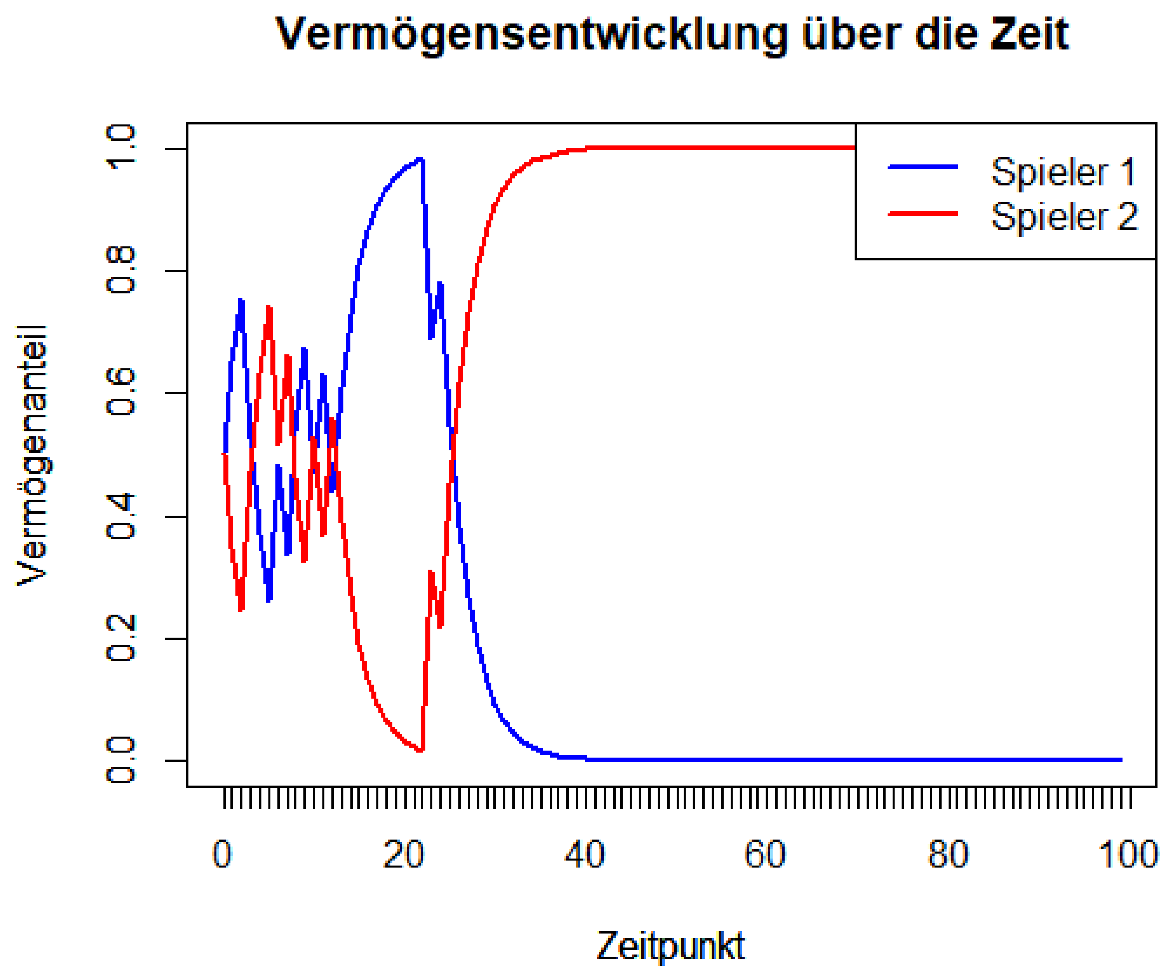
# Martingal Konvergenz Theorem

Sei $(X_t : t \geq 0)$ ein **Martingal** und $X_t \in [0,1]$ (**beschränkt**).

Dann konvergiert $X_t \xrightarrow{f.s.} X_\infty \in [0,1]\,, \quad t \to \infty\,.$

Und es gilt $S(X_t) := \mathbb{E}\left[(X_{t+1} - X_t)^2 \middle| X_t\right] \xrightarrow{f.s.} 0\,.$



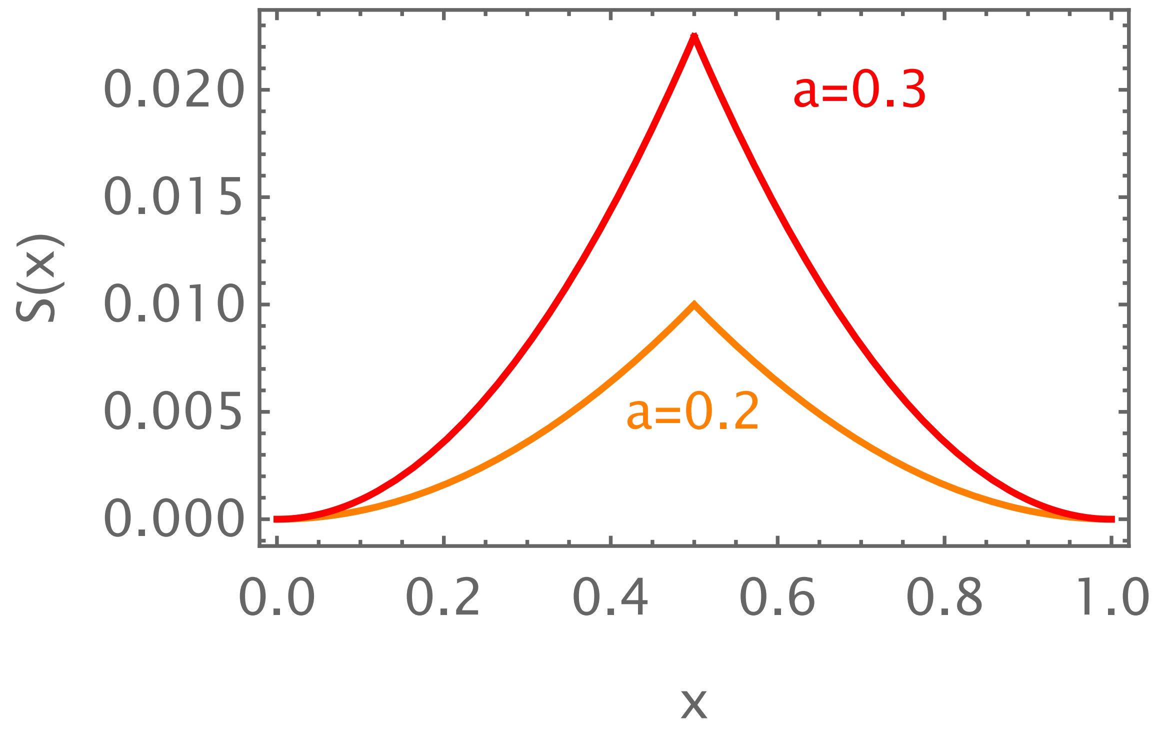
# Martingal Konvergenz Theorem

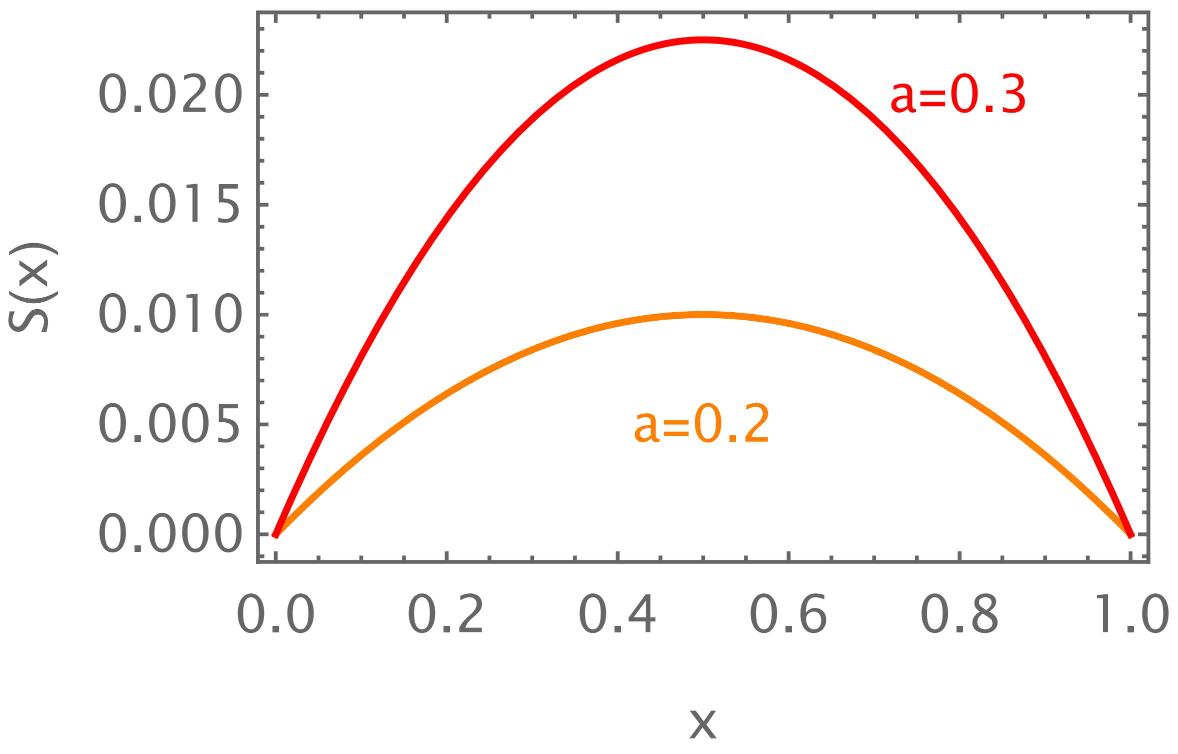
Sei $(X_t : t \geq 0)$ ein **Martingal** und $X_t \in [0,1]$ (**beschränkt**).

Dann konvergiert $X_t \xrightarrow{f.s.} X_\infty \in [0,1]\ , \quad t \to \infty\ .$

Und es gilt $S(X_t) := \mathbb{E}\Big[(X_{t+1} - X_t)^2 \Big| X_t\Big] \xrightarrow{f.s.} 0\ .$

In unserem Fall: $X_\infty \in \{0,1\} \quad \text{mit} \quad \mathbb{P}[X_\infty = 1] = X_0$



# Martingal Konvergenz Theorem

Sei $(X_t : t \geq 0)$ ein **Martingal** und $X_t \in [0,1]$ (**beschränkt**).

Dann konvergiert $X_t \xrightarrow{f.s.} X_\infty \in [0,1]\,, \quad t \to \infty\,.$

Und es gilt $S(X_t) := \mathbb{E}\Big[(X_{t+1} - X_t)^2 \Big| X_t\Big] \xrightarrow{f.s.} 0\,.$

In unserem Fall: $X_\infty \in \{0,1\} \quad \text{mit} \quad \mathbb{P}[X_\infty = 1] = X_0$

Denn: $\mathbb{E}[X_\infty | X_0] = X_0 = 1 \cdot \mathbb{P}[X_\infty = 1] + 0 \cdot \mathbb{P}[X_\infty = 0]$

# Martingal Konvergenz Theorem

Sei $(X_t : t \geq 0)$ ein **Martingal** und $X_t \in [0,1]$ (**beschränkt**).

Dann konvergiert $X_t \xrightarrow{f.s.} X_\infty \in [0,1]\,, \quad t \to \infty\,.$

Und es gilt $S(X_t) := \mathbb{E}\Big[(X_{t+1} - X_t)^2 \Big| X_t\Big] \xrightarrow{f.s.} 0\,.$

In unserem Fall: $X_\infty \in \{0,1\} \quad \mathrm{mit} \quad \mathbb{P}[X_\infty = 1] = X_0$

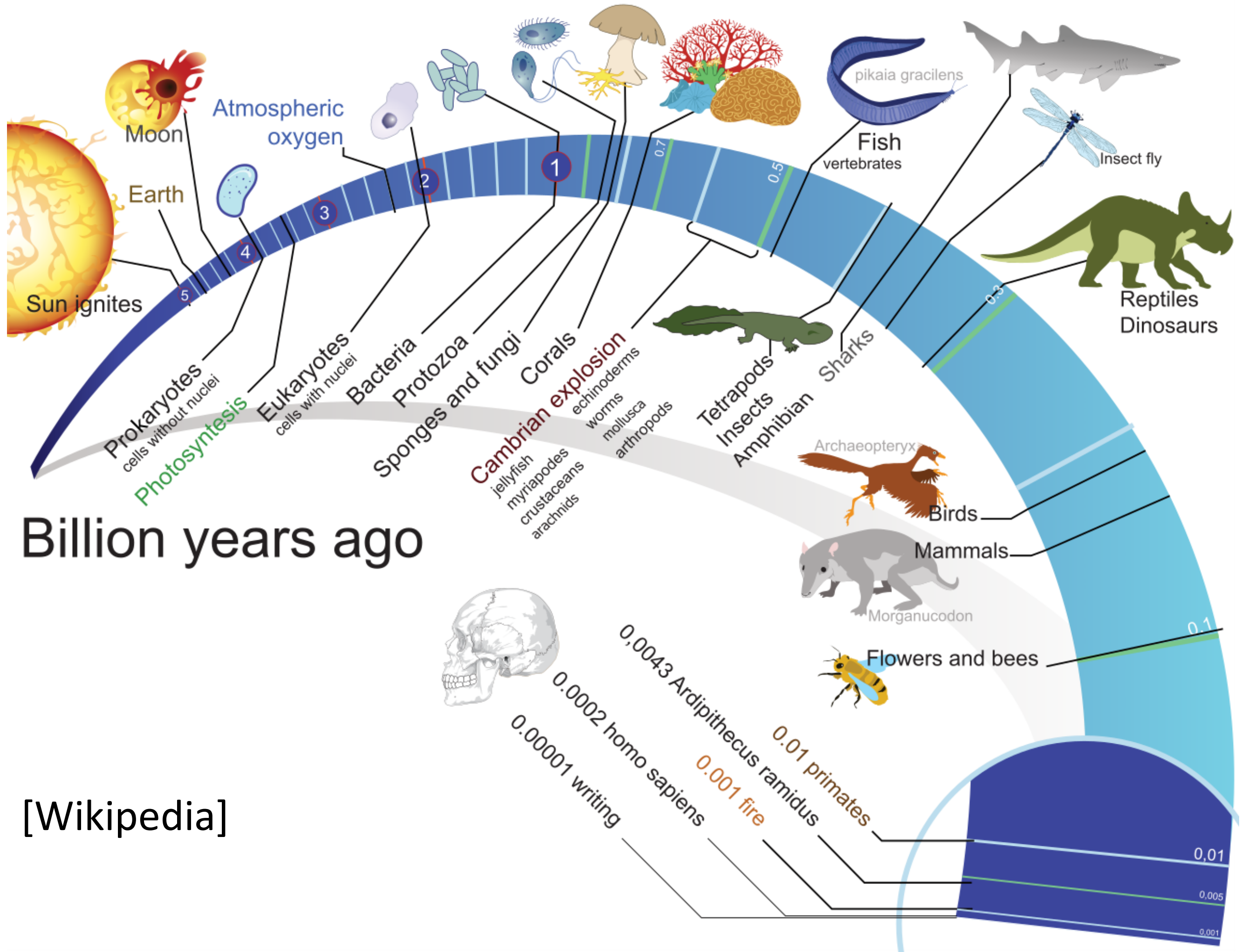
Denn: $\mathbb{E}[X_\infty | X_0] = X_0 = 1 \cdot \mathbb{P}[X_\infty = 1] + 0 \cdot \mathbb{P}[X_\infty = 0]$

**Der faire Wettbewerb führt zum Monopol!**

**Der Prozess ist nicht ergodisch!**

# Warum sind nicht überall Monopole?

- **Lokalisierung** (statt Globalisierung)
  in der Zeit und im Raum
  führt zu **Diversität**

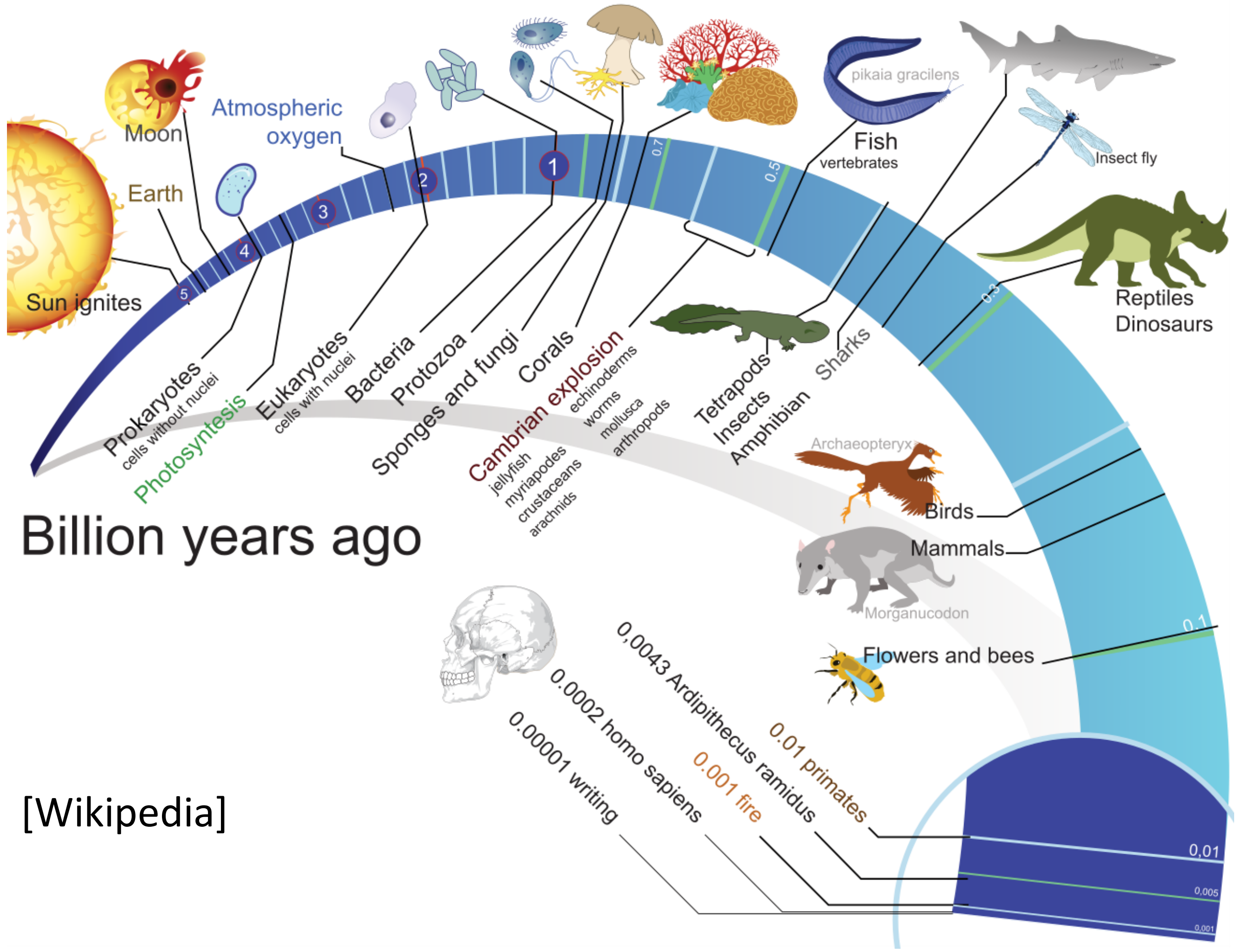



[Wikipedia]

# Warum sind nicht überall Monopole?

- **Lokalisierung** (statt Globalisierung)
  in der Zeit und im Raum
  führt zu **Diversität**

- **Wachstum**
  verzögert Monopolbildung



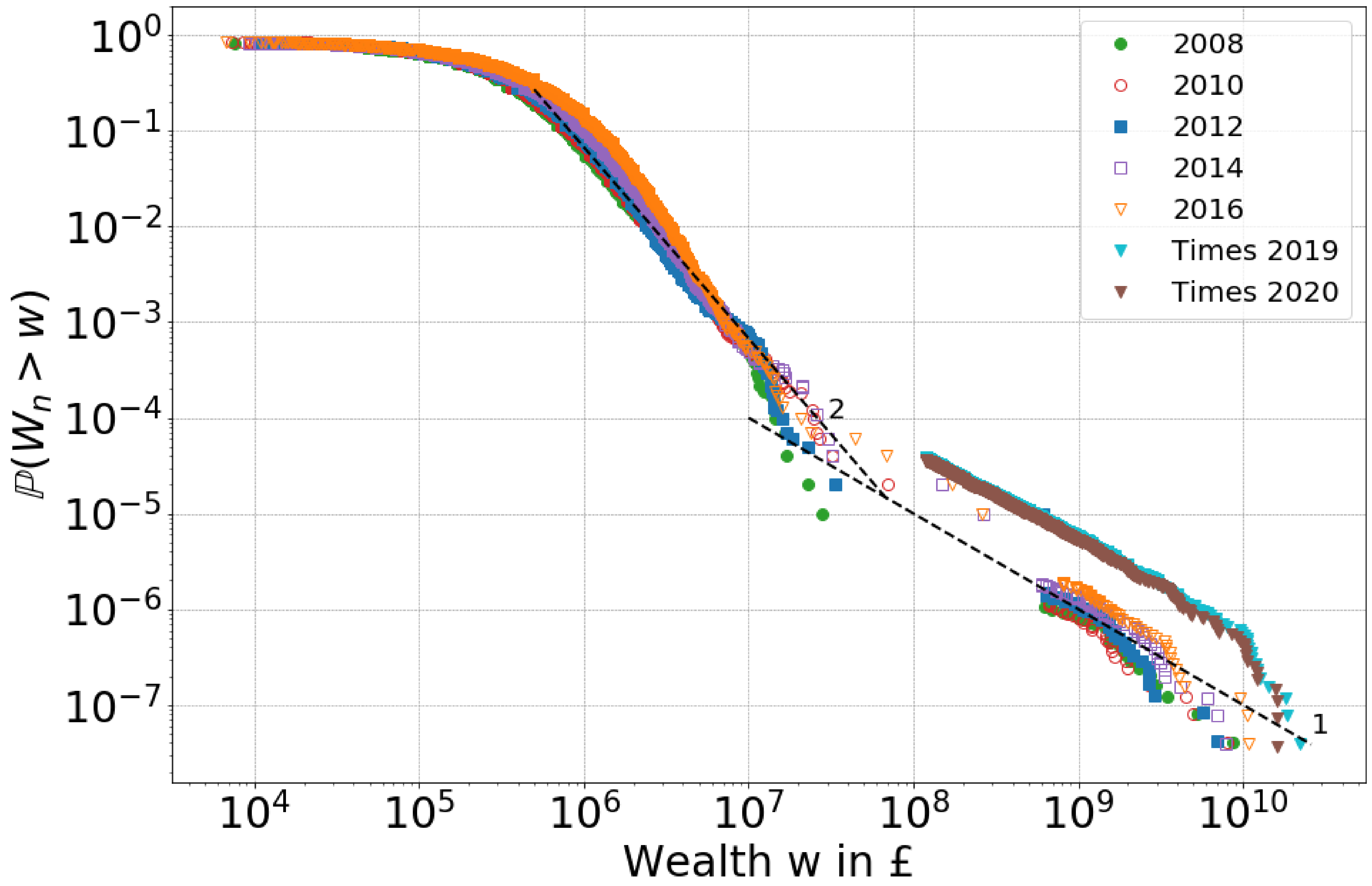

[Wikipedia]

# Warum sind nicht überall Monopole?

- **Lokalisierung** (statt Globalisierung)
  in der Zeit und im Raum
  führt zu **Diversität**

- **Wachstum**
  verzögert Monopolbildung

[Forbes, Grosskinsky, PLoS ONE 17(8): e027286 (2022)]



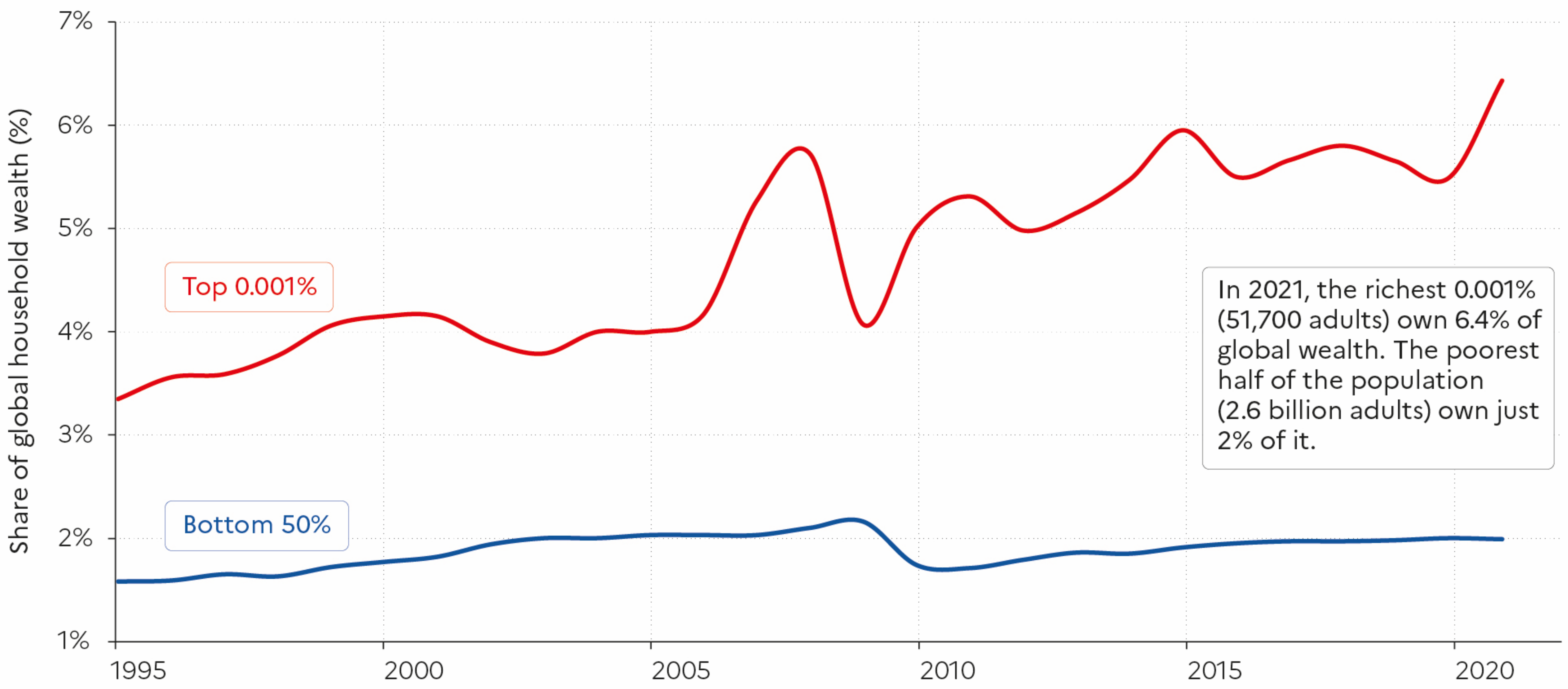
# Warum sind nicht überall Monopole?

- **Lokalisierung** (statt Globalisierung)
  in der Zeit und im Raum
  führt zu **Diversität**

- **Wachstum**
  verzögert Monopolbildung

[https://wir2022.wid.world/]

**Figure 4.3a** ***Extreme wealth inequality: top 0.001% vs. bottom 50% wealth share, 1995-2021***



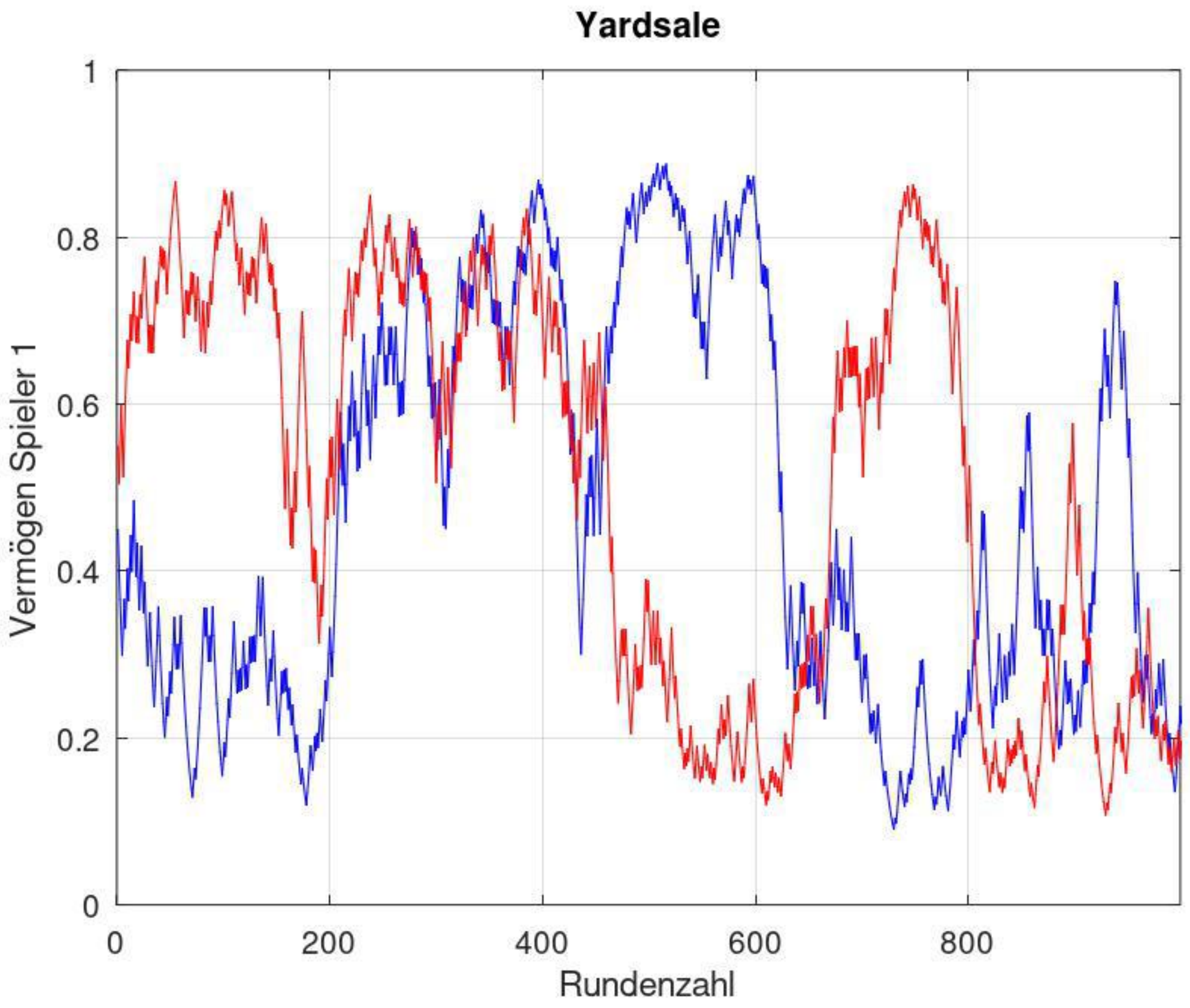

***Interpretation:*** *The share of household wealth detained by the richest 0.001% of adults rose from less than 3.5% of total wealth in 1995 to nearly 6.5% today. After a very slight increase, the share of wealth owned by the poorest half of the population has stagnated since the early 2000s at around 2%. Net household wealth is equal to the sum of financial assets (e.g. equity or bonds) and non-financial assets (e.g. housing or land) owned by individuals, net of their debts.* ***Sources and series:*** *wir2022.wid.world/methodology, Bauluz et al. (2021) and updates.*

# Warum sind nicht überall Monopole?

- **Lokalisierung** (statt Globalisierung)
  in der Zeit und im Raum
  führt zu **Diversität**

- **Wachstum**
  verzögert Monopolbildung

- **„Nicht-faire“ Dynamik**
  Decreasing vs. Increasing Returns
  [W.B. Arthur, 1994]



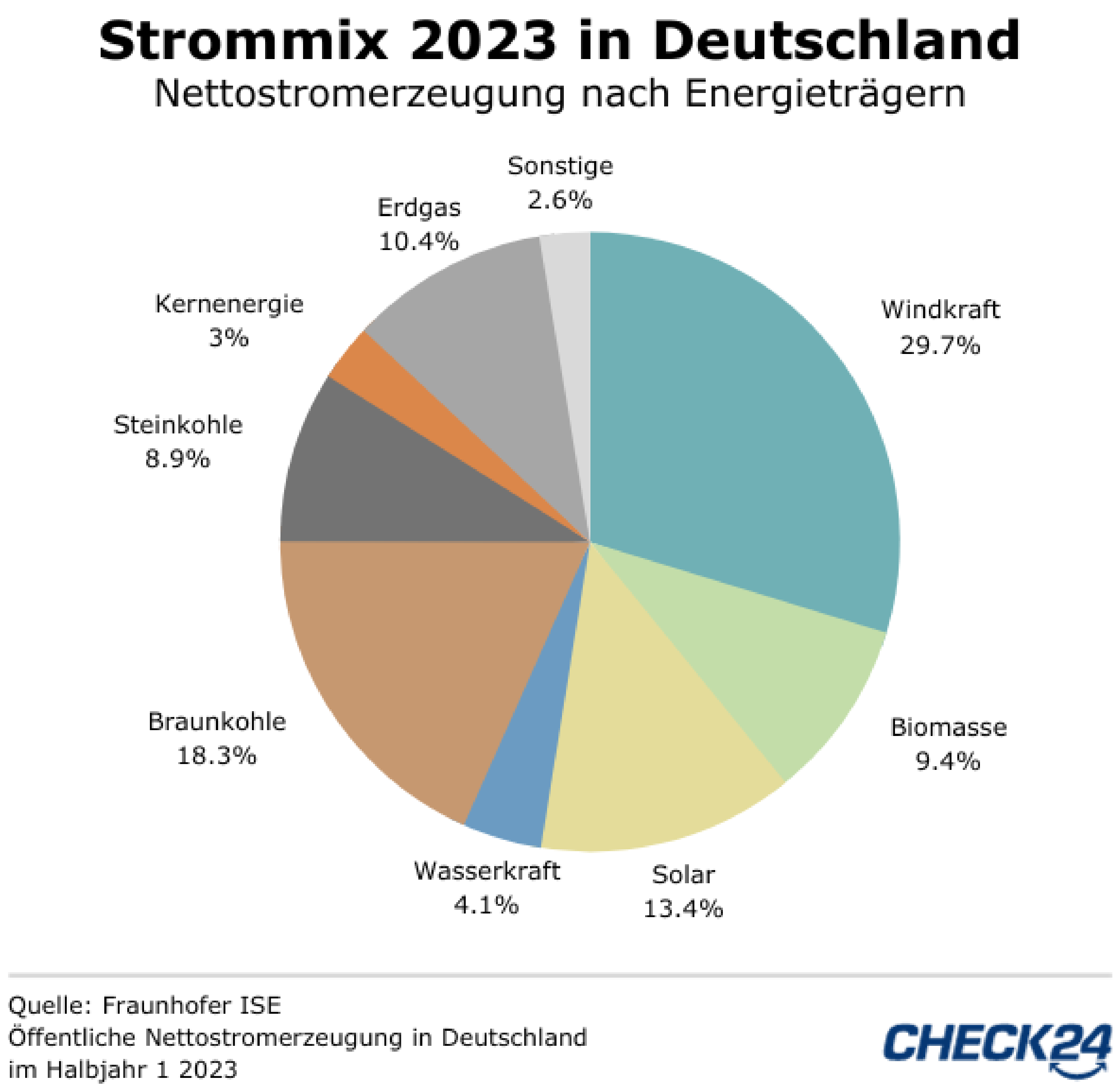

[BA Roman Winkler]

# Warum sind nicht überall Monopole?

- **Lokalisierung** (statt Globalisierung)
  in der Zeit und im Raum
  führt zu **Diversität**

- **Wachstum**
  verzögert Monopolbildung

- **„Nicht-faire“ Dynamik**
  Decreasing vs. Increasing Returns
  [W.B. Arthur, 1994]

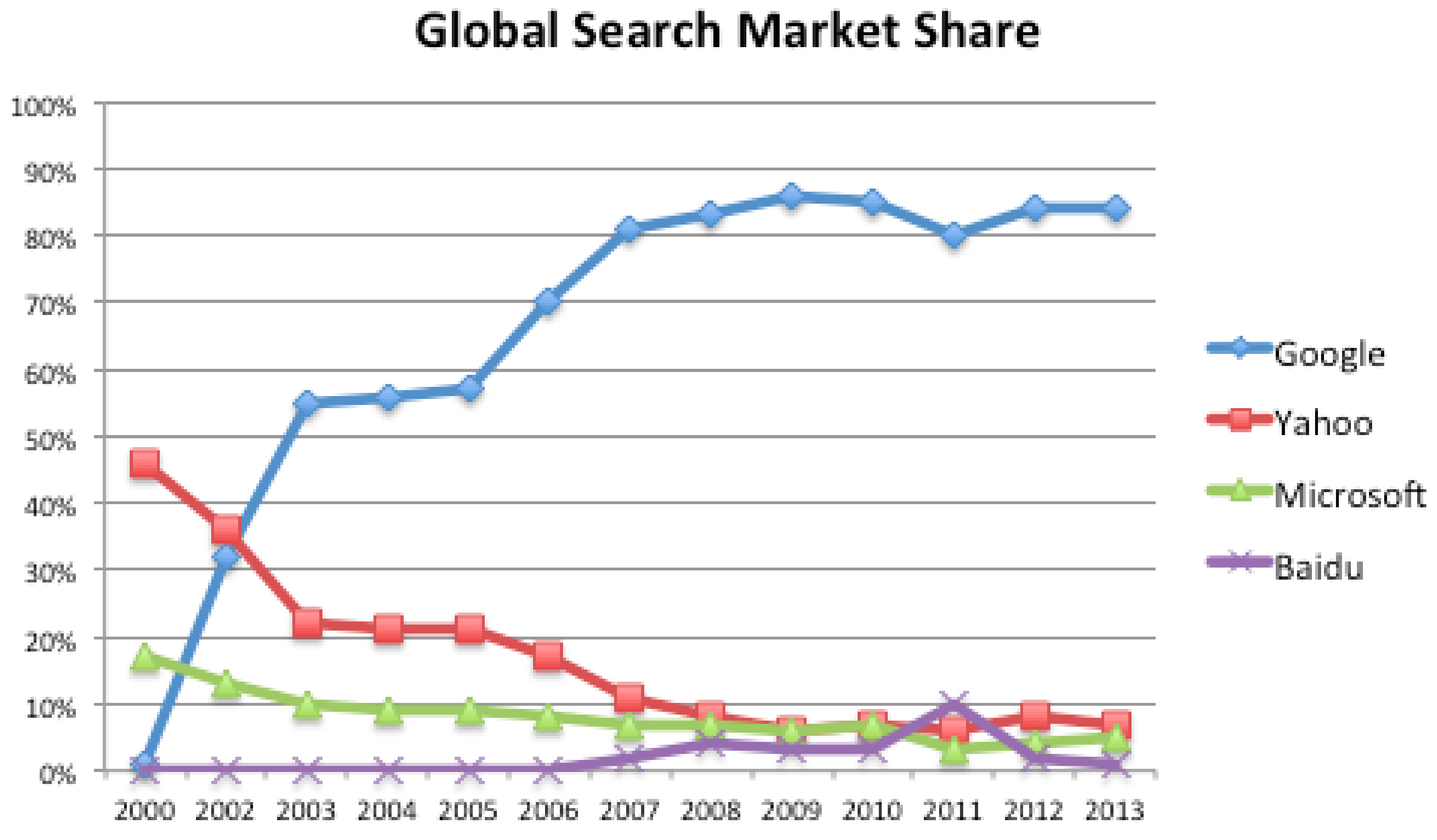


# Warum sind nicht überall Monopole?

- **Lokalisierung** (statt Globalisierung)
  in der Zeit und im Raum
  führt zu **Diversität**

- **Wachstum**
  verzögert Monopolbildung

- **„Nicht-faire“ Dynamik**
  Decreasing vs. Increasing Returns
  [W.B. Arthur, 1994]




https://www.pinterest.de/pin/191262315399168228/

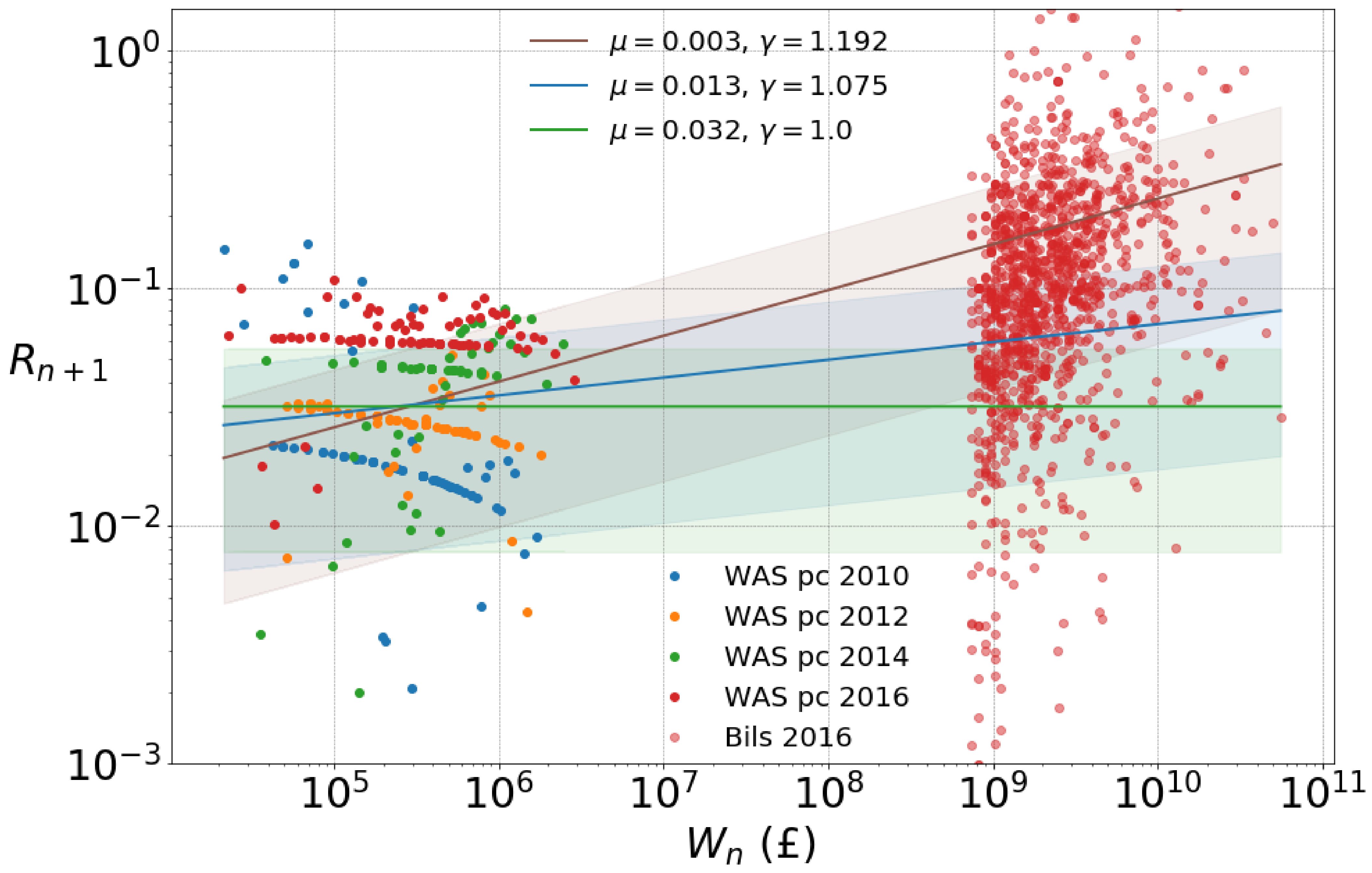
# Warum sind nicht überall Monopole?

- **Lokalisierung** (statt Globalisierung)
  in der Zeit und im Raum
  führt zu **Diversität**

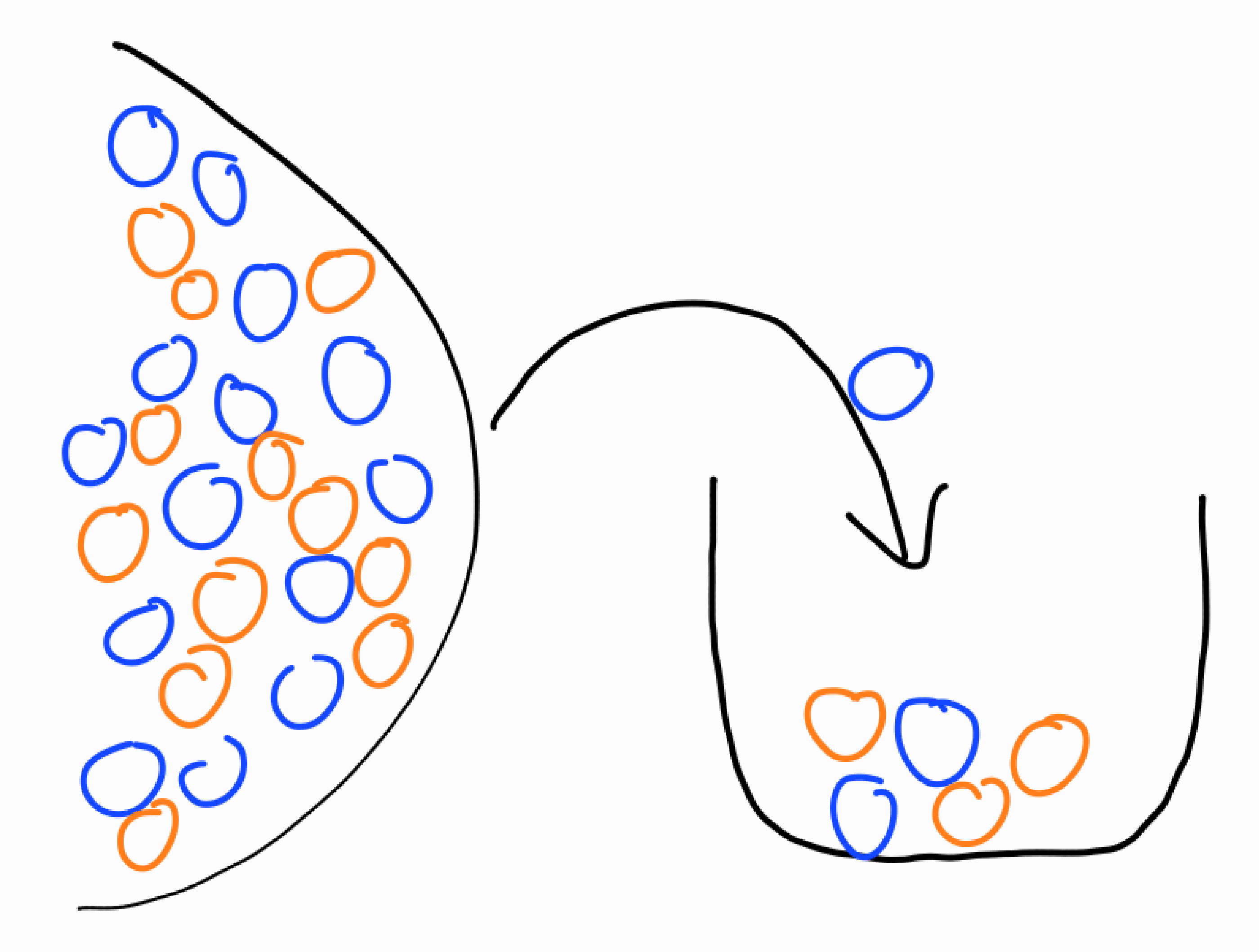
- **Wachstum**
  verzögert Monopolbildung

- **„Nicht-faire“ Dynamik**
  Decreasing vs. Increasing Returns
  [W.B. Arthur, 1994]

[Forbes, Grosskinsky, PLoS ONE 17(8): e027286 (2022)]

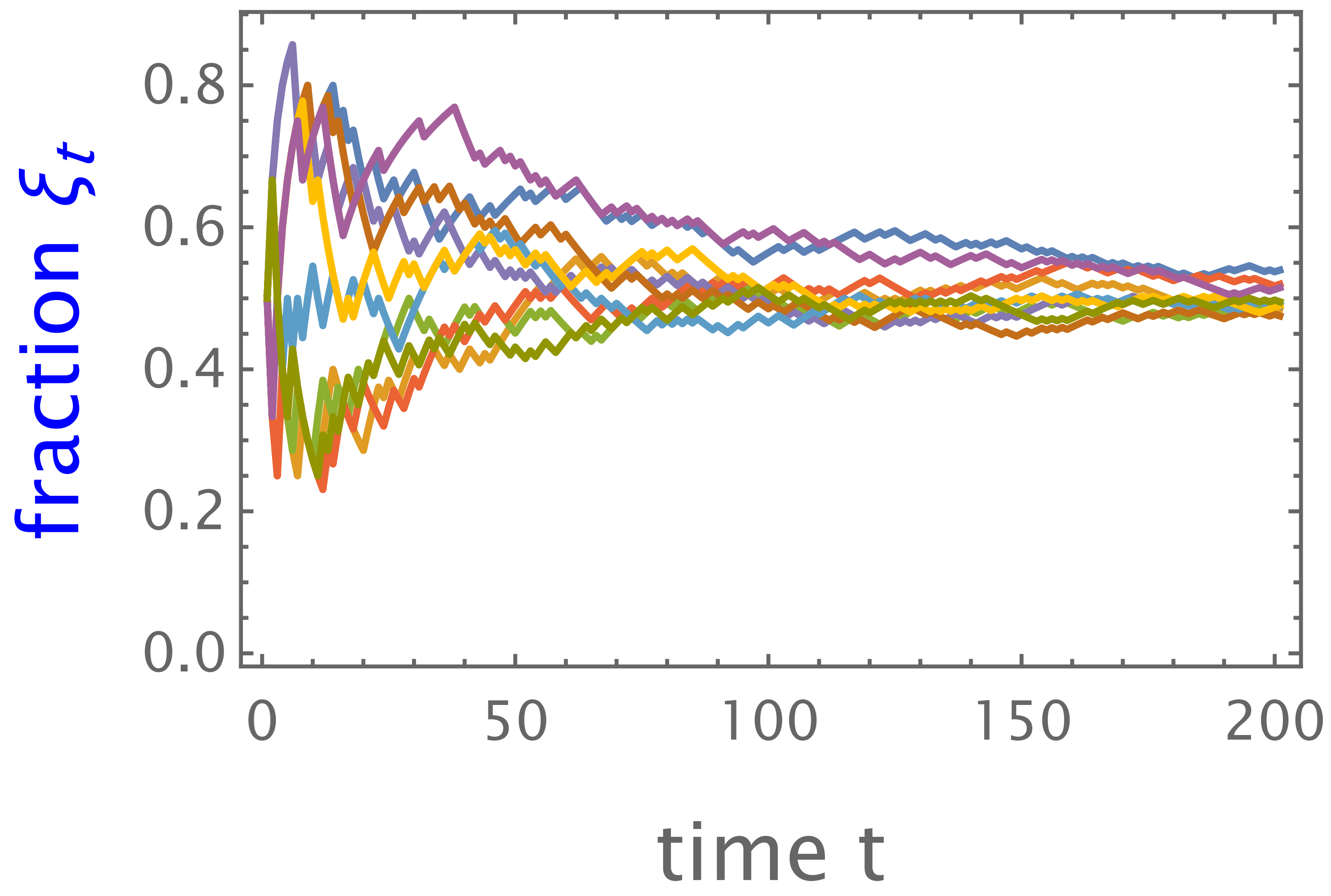


# Wachstumsmodelle - Immigration



$$X_{t+1} = X_t \begin{cases} +1 & \text{, mit Wk } \mathbf{1/2} \\ +0 & \text{, mit Wk } \mathbf{1/2} \end{cases}$$

# Wachstumsmodelle - Immigration



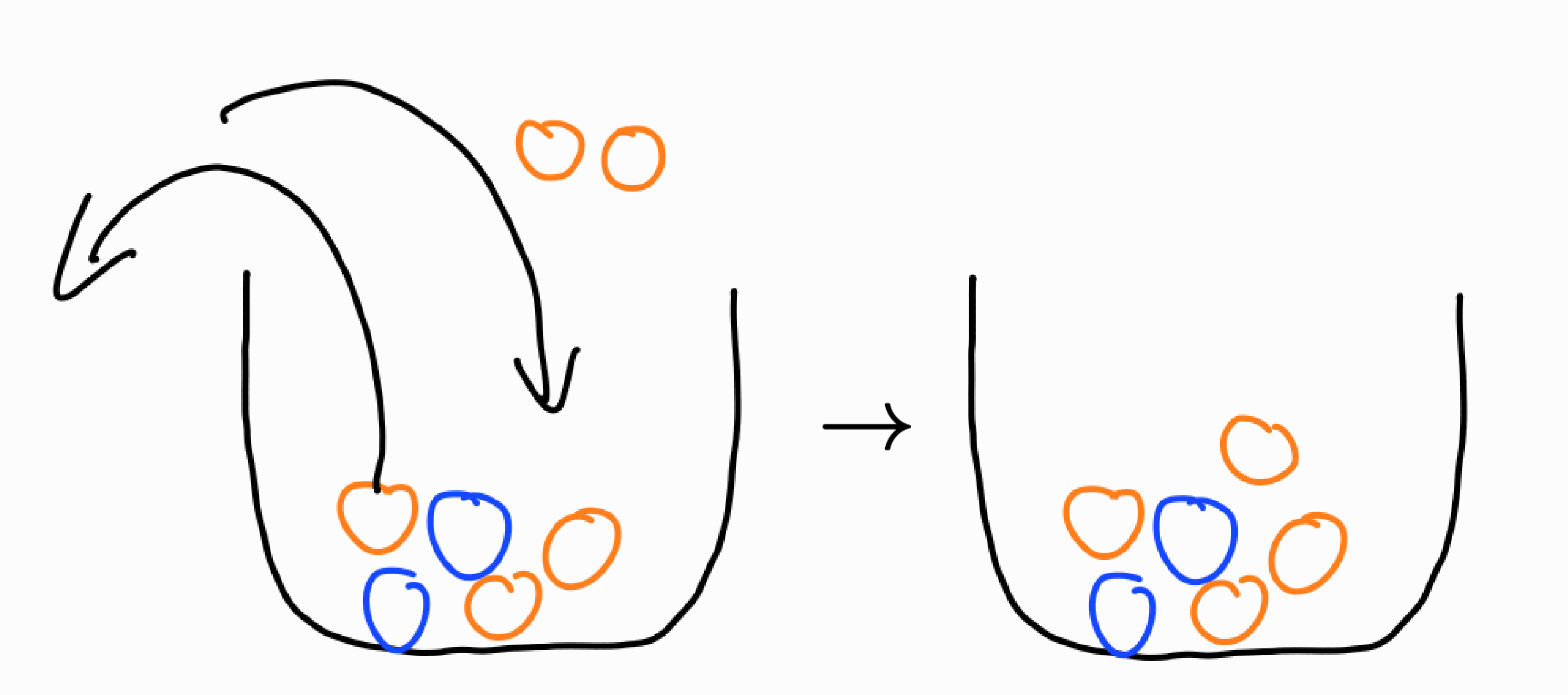

$$X_{t+1} = X_t \begin{cases} +1 & , \text{ mit Wk } \mathbf{1/2} \\ +0 & , \text{ mit Wk } \mathbf{1/2} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbf{GGZ:} \quad \xi_t = \frac{1}{t} X_t \xrightarrow{f.s.} \frac{1}{2} \,, \quad t \to \infty}$$

unabhängig von $X_0, \ Y_0 \geq 0$

# Wachstumsmodelle - Pólya Urne [Eggenberger, Pólya, 1923]

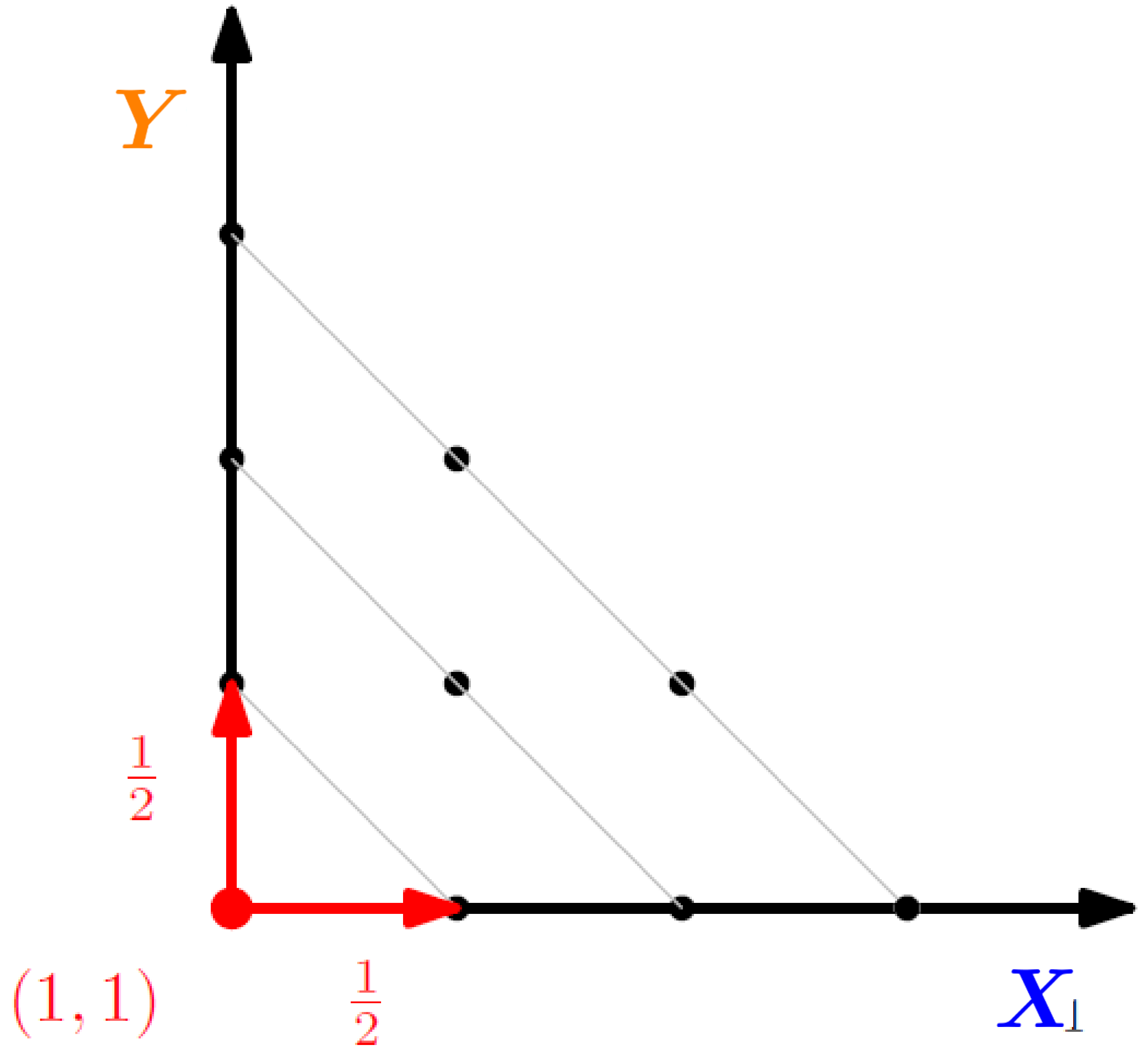
$$X_0 = 1 \quad Y_0 = 1$$



$$X_{t+1} = X_t \begin{cases} +1 & \text{, mit Wk } \frac{X_t}{t+2} \\ +0 & \text{, mit Wk } 1 - \frac{X_t}{t+2} \end{cases}$$

$$\boxed{\xi_t = \frac{1}{t+2} X_t \longrightarrow ?\,, \quad t \to \infty}$$

# Pólya Urne [Eggenberger, Pólya, 1923]

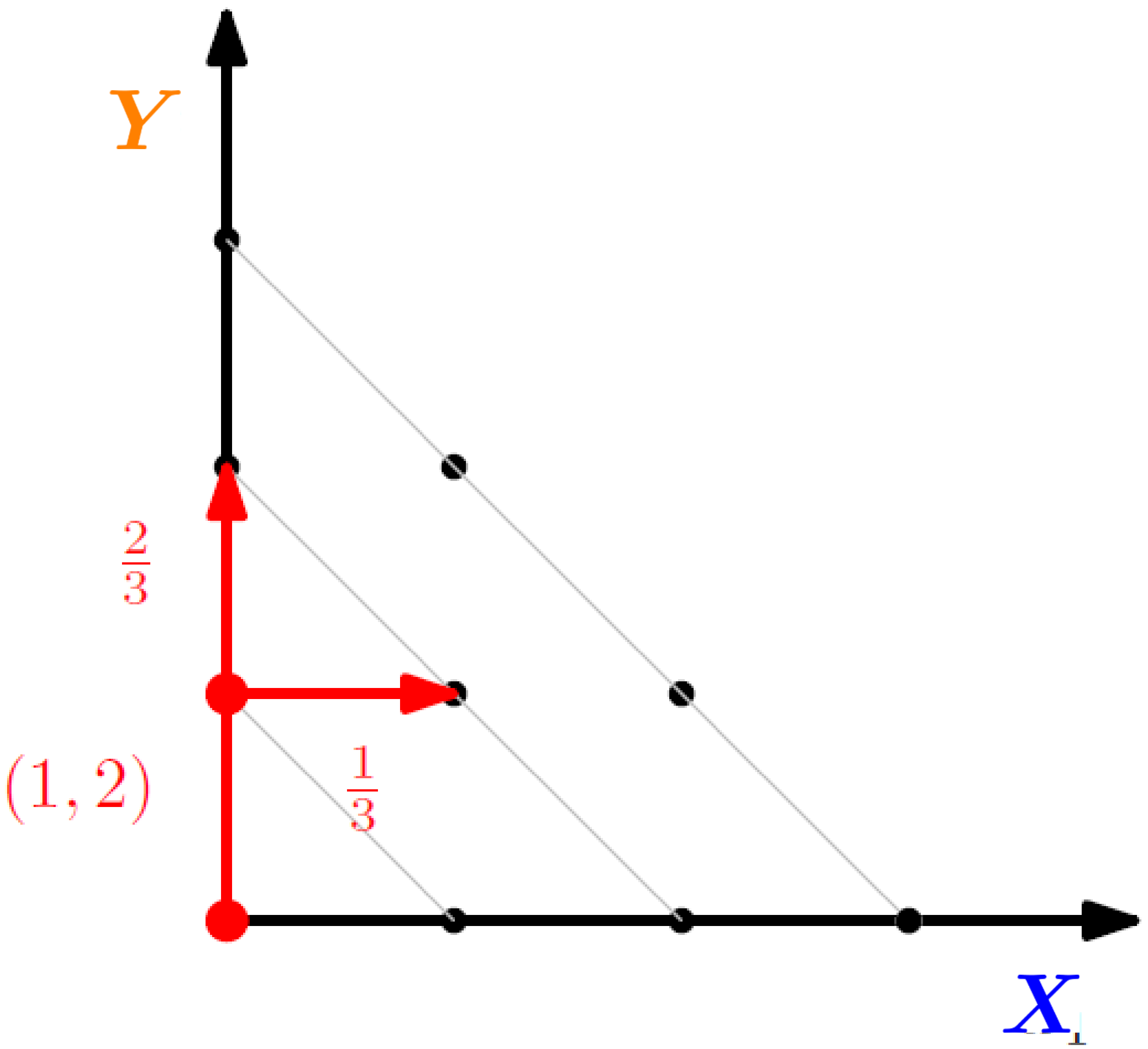



$$X_0 = 1 \quad Y_0 = 1$$

$$X_{t+1} = X_t \begin{cases} +1 & , \text{ mit Wk } \frac{X_t}{t+2} \\ +0 & , \text{ mit Wk } 1 - \frac{X_t}{t+2} \end{cases}$$

$$\boxed{\xi_t = \frac{1}{t+2} X_t \longrightarrow ?\,, \quad t \to \infty}$$

# Pólya Urne [Eggenberger, Pólya, 1923]

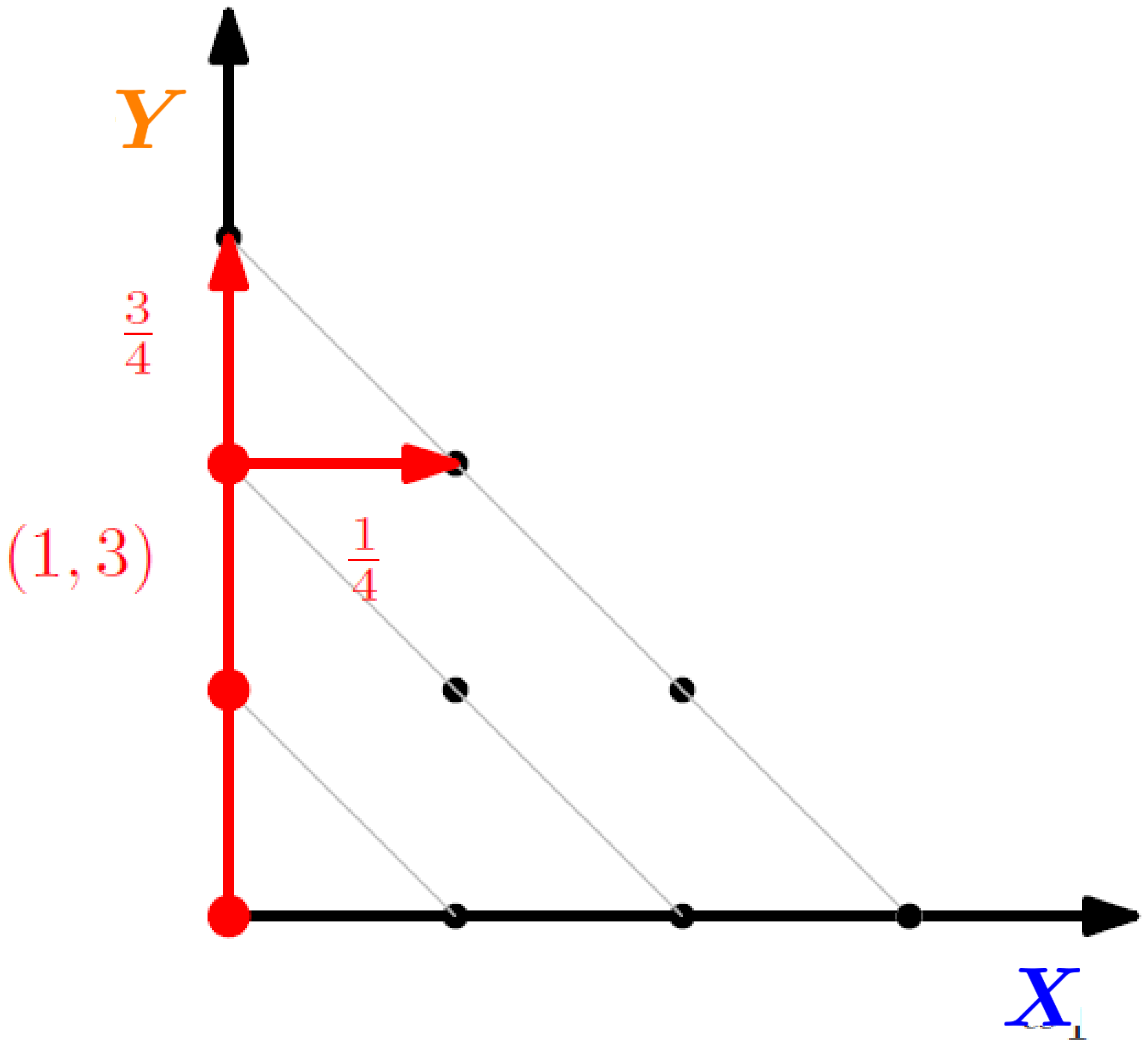



$$X_0 = 1 \quad Y_0 = 1$$

$$X_{t+1} = X_t \begin{cases} +1 & , \text{ mit Wk } \frac{X_t}{t+2} \\ +0 & , \text{ mit Wk } 1 - \frac{X_t}{t+2} \end{cases}$$

$$\boxed{\xi_t = \frac{1}{t+2} X_t \longrightarrow ?\,, \quad t \to \infty}$$

# Pólya Urne [Eggenberger, Pólya, 1923]

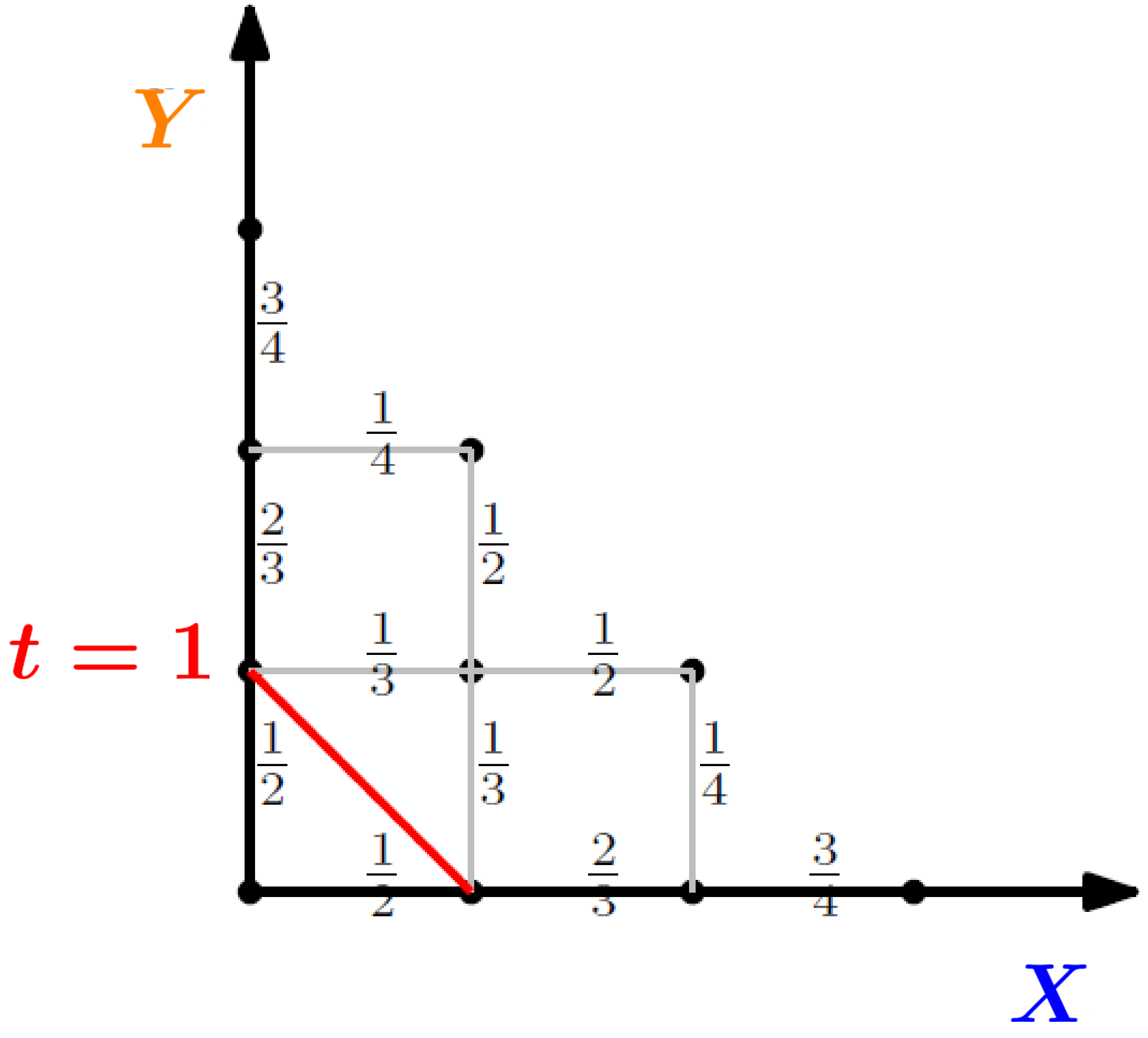



$$\boldsymbol{X_0 = 1} \quad \boldsymbol{Y_0 = 1}$$

$$\boldsymbol{X_{t+1} = X_t} \begin{cases} \boldsymbol{+1} & \text{, mit Wk } \frac{\boldsymbol{X_t}}{\boldsymbol{t+2}} \\ \boldsymbol{+0} & \text{, mit Wk } \boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{X_t}}{\boldsymbol{t+2}} \end{cases}$$

$$\boxed{\xi_t = \frac{1}{t+2} X_t \longrightarrow ?\,, \quad t \to \infty}$$

# Pólya Urne [Eggenberger, Pólya, 1923]

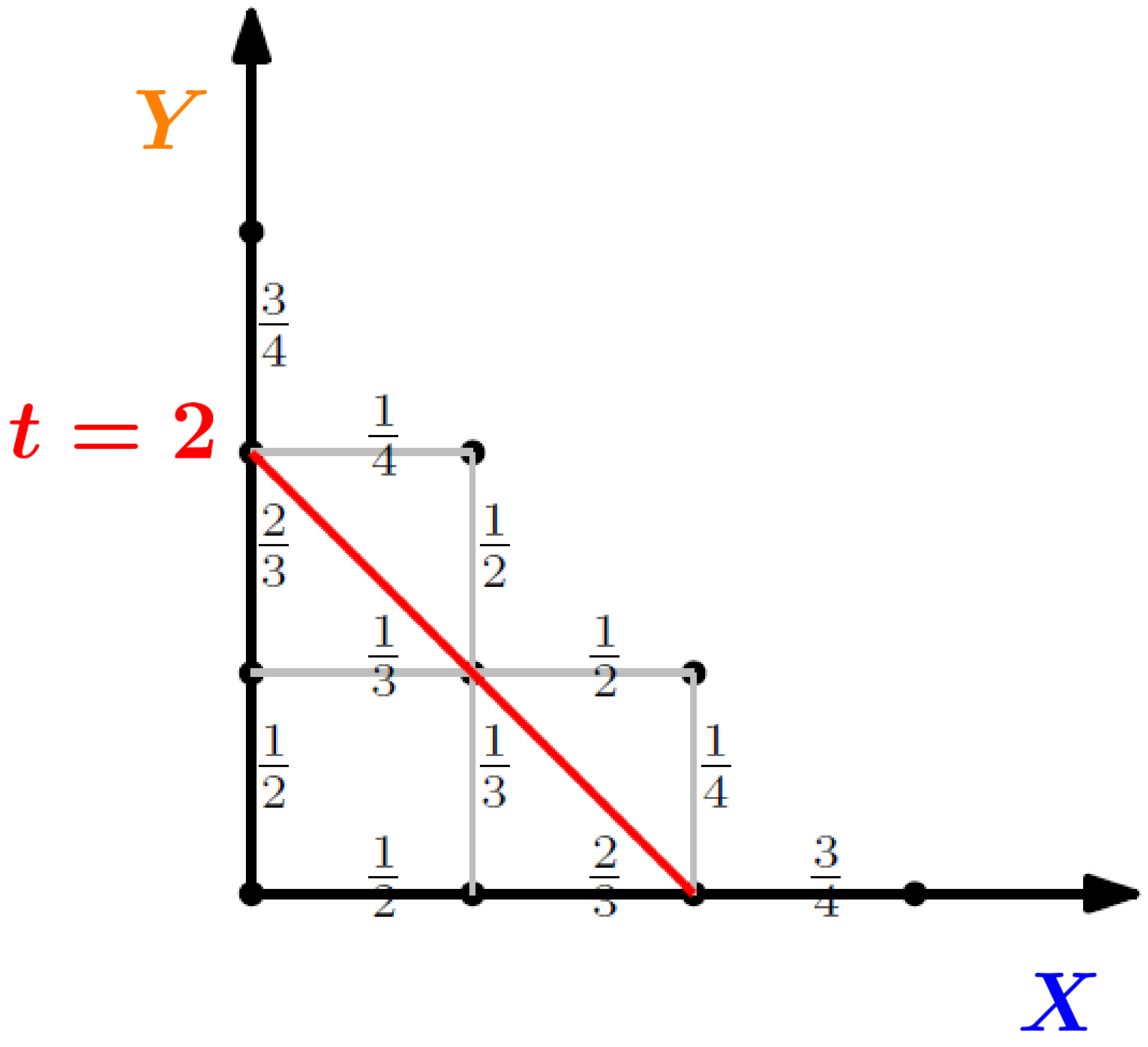



$$X_0 = 1 \quad Y_0 = 1$$

$$X_{t+1} = X_t \begin{cases} +1 & \text{, mit Wk } \frac{X_t}{t+2} \\ +0 & \text{, mit Wk } 1 - \frac{X_t}{t+2} \end{cases}$$

$$\boxed{\xi_t = \frac{1}{t+2} X_t \longrightarrow ?\,, \quad t \to \infty}$$

# Pólya Urne [Eggenberger, Pólya, 1923]



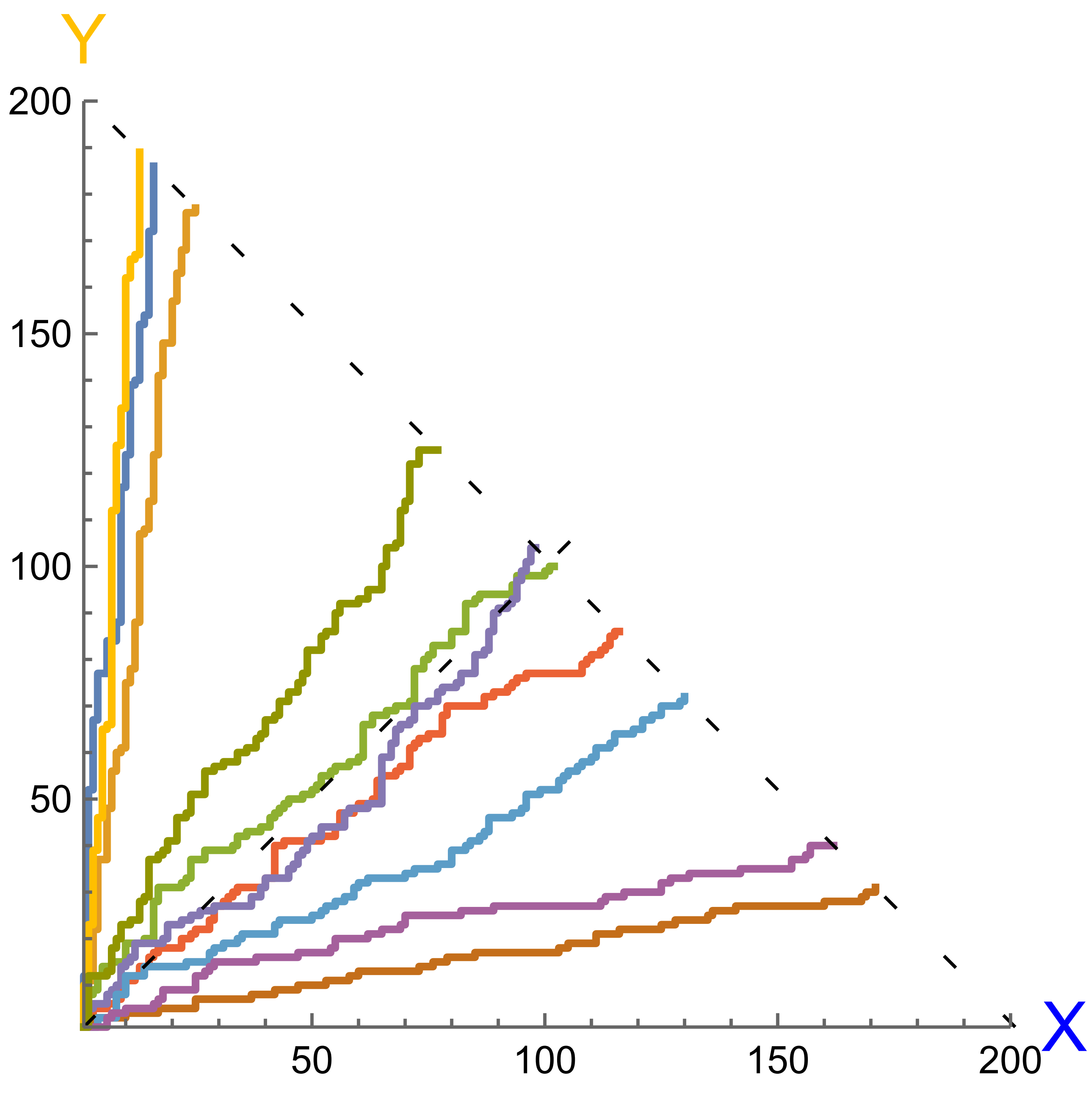

$$X_0 = 1 \quad Y_0 = 1$$

$$X_{t+1} = X_t \begin{cases} +1 & \text{, mit Wk } \frac{X_t}{t+2} \\ +0 & \text{, mit Wk } 1 - \frac{X_t}{t+2} \end{cases}$$

$\xi_t \in [0, 1]$ gleichverteilt für $t \geq 0$

$$\xi_t \longrightarrow \xi_\infty \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$$

# Pólya Urne [Eggenberger, Pólya, 1923]




$$X_0 = 1 \quad Y_0 = 1$$

$$X_{t+1} = X_t \begin{cases} +1 & , \text{ mit Wk } \frac{X_t}{t+2} \\ +0 & , \text{ mit Wk } 1 - \frac{X_t}{t+2} \end{cases}$$

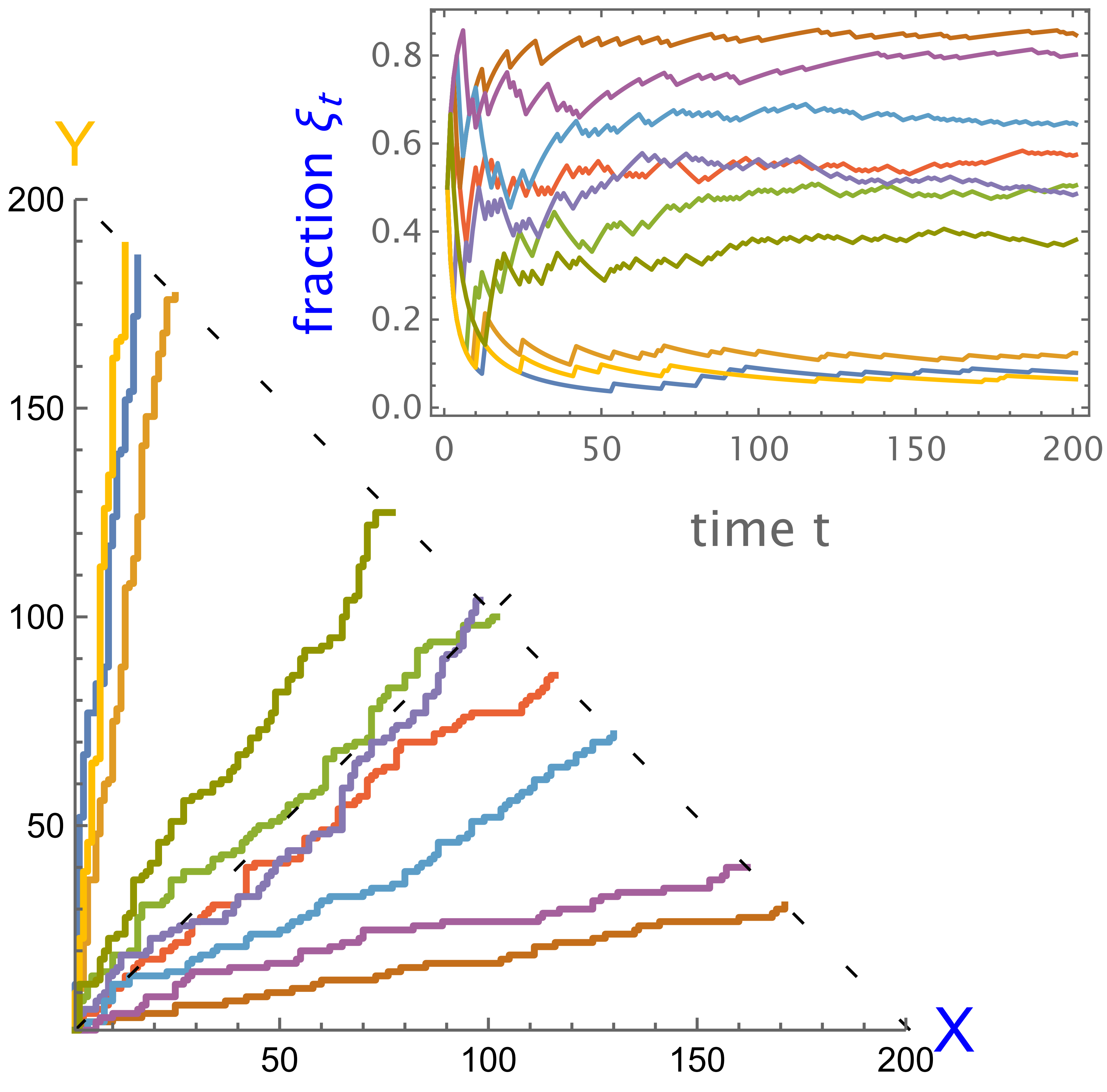
$\xi_t \in [0,1]$ gleichverteilt für $t \geq 0$

$\xi_t \xrightarrow{f.s.} \xi_\infty \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$

$\mathbb{E}[\xi_{t+1} | \xi_t] = \xi_t$ Martingal

$\mathbb{E}[(\xi_{t+1} - \xi_t)^2 | \xi_t] \leq \dfrac{C}{t^2} \to 0$

# Pólya Urne [Eggenberger, Pólya, 1923]




$X_0 = 1 \quad Y_0 = 1$

$$X_{t+1} = X_t \begin{cases} +1 & , \text{ mit Wk } \frac{X_t}{t+2} \\ +0 & , \text{ mit Wk } 1 - \frac{X_t}{t+2} \end{cases}$$

$\xi_t \in [0,1]$ gleichverteilt für $t \geq 0$

$\xi_t \xrightarrow{f.s.} \xi_\infty \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$

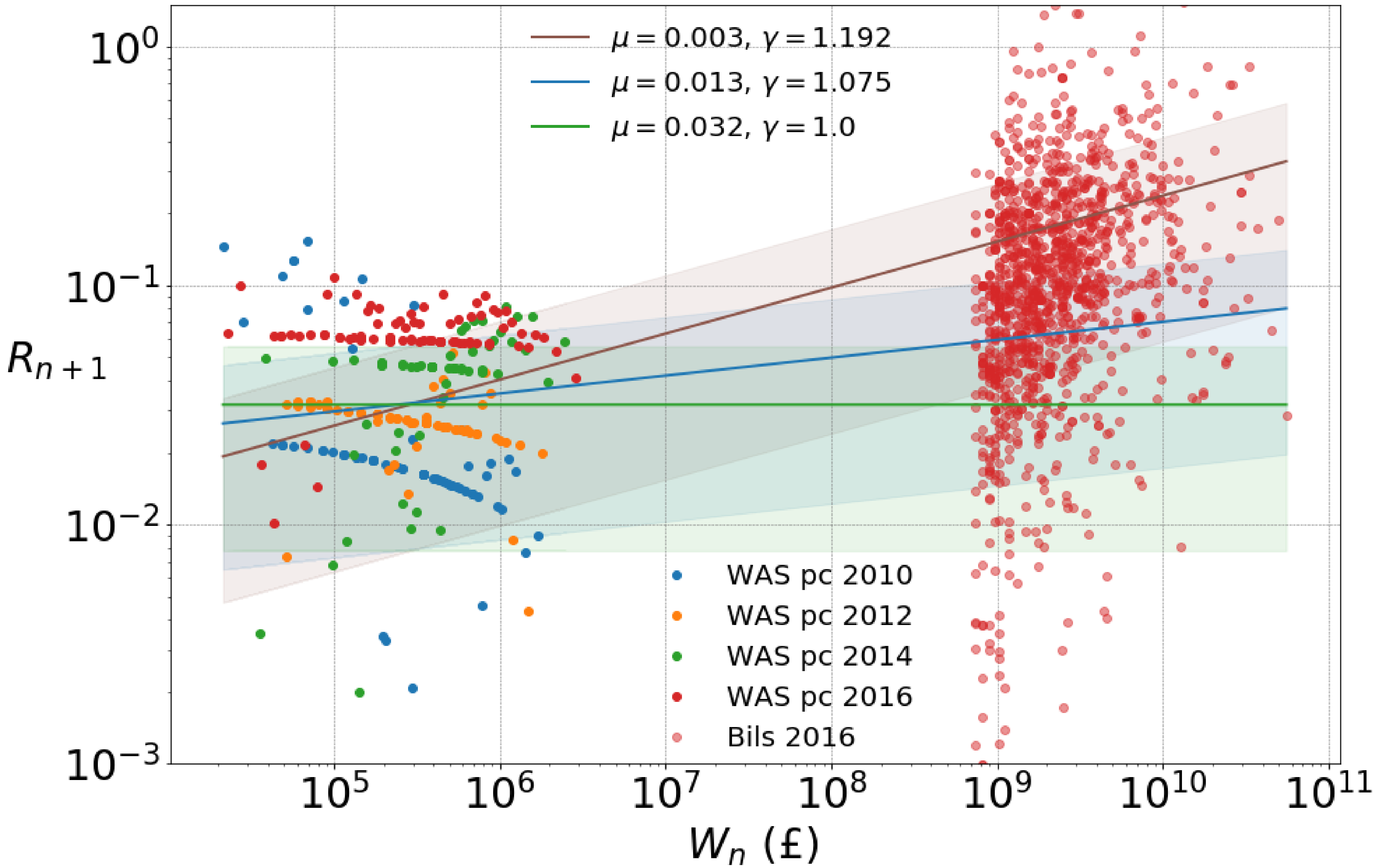
$\mathbb{E}[\xi_{t+1}|\xi_t] = \xi_t$ Martingal

$\mathbb{E}[(\xi_{t+1} - \xi_t)^2|\xi_t] \leq \frac{C}{t^2} \to 0$

# Nicht-lineare Pólya Urne

Increasing Returns $\Rightarrow$ **starkes Monopol**

$$X_{t+1} = X_t \begin{cases} +1 & , \text{ mit Wk } \frac{X_t^\gamma}{X_t^\gamma + Y_t^\gamma} \\ +0 & , \text{ mit Wk } \frac{Y_t^\gamma}{X_t^\gamma + Y_t^\gamma} \end{cases}$$




$\gamma > 1$ Increasing Returns

$\gamma \in (0,1)$ Decreasing Returns

[PhD Thomas Gottfried]

# Kann es wirklich nur eine(n) geben?

**Faire Wettbewerbsprozesse**

Sei $(X_t : t \geq 0)$ ein **Martingal** und $X_t \in [0,1]$ (**beschränkt**).

Dann konvergiert $X_t \xrightarrow{f.s.} X_\infty \in [0,1]\ , \quad t \to \infty\ .$

Und es gilt $S(X_t) := \mathbb{E}\Big[(X_{t+1} - X_t)^2 \Big| X_t\Big] \xrightarrow{f.s.} 0\ .$

Multiplikativer Prozess: $X_\infty \in \{0,1\} \quad \text{mit} \quad \mathbb{P}[X_\infty = 1] = X_0$

Additiver Prozess: $X_\infty \in [0,1] \quad \text{mit} \quad \mathbb{E}[X_\infty | X_0] = X_0$

**Der faire multiplikative Wettbewerb führt zum Monopol!**